Задача 1 (10 баллов)

В-1 В выражении

$$A = 81^{0.5*\log_9 7}$$

на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

Ответ: 2401

Решение. $A_+ = 81^{0.5+\log_9 7} = 9 \cdot 7^2 = 9 \cdot 49$. $A_- = 81^{0.5-\log_9 7} = 9 : 7^2 = 9 : 49$. $A_\times = 81^{0.5\log_9 7} = 9^{2\cdot 0.5\log_9 7} = 7$. $A_: = 81^{0.5:\log_9 7} = 9^{\log_7 9}$. Оценим величину $A_:$ $9 = 9^{\log_7 7} < 9^{\log_7 9} < 9^{\log_7 49} = 9^2$. Следовательно, в ответ идёт $\frac{A_+}{A_-} = 49^2 = 2401$.

В-2 В выражении

$$A = 36^{0.5*\log_6 7}$$

на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

Ответ: 2401

Решение. $A_: > A_-$.

В-3 В выражении

$$A = 81^{0.5*\log_9 6}$$

на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

Ответ: 1296

В-4 4. В выражении

$$A = 49^{0.5*\log_7 9}$$

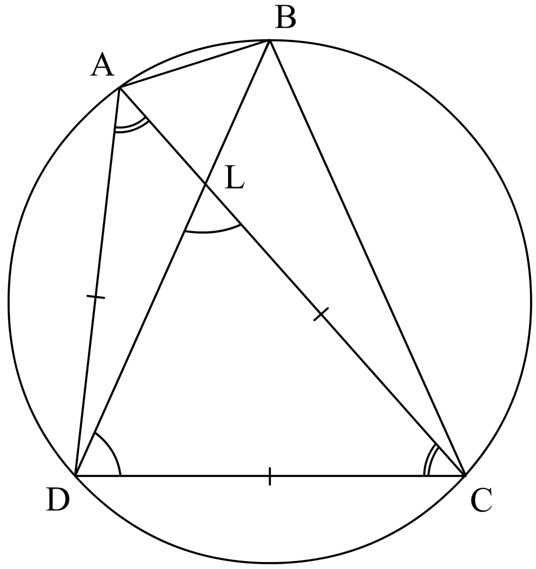
на месте знака $*$ может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий $(+, -, :, \times)$. Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

Ответ: 6561

Задача 2 (10 баллов)

Условие в общем виде

Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны a, отношение длин дуг AB и BC равно k, а также равны длины отрезков AD и CL, где L — точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги AB (BC).



Ответ: $\dfrac{k}{1-k}\,a$.

Решение. Из условия задачи следует, что треугольники ACD и CDL равнобедренные. Обозначим $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} = 2\alpha$, тогда $\widehat{CDL} = \widehat{CLD} = \pi/2 - \alpha$, $\widehat{ADL} = \pi/2 - 3\alpha$. Поскольку длина дуги пропорциональна величине опирающегося на нее вписанного угла, имеем

$$\frac{|\overset{\frown}{AB}|}{|\overset{\frown}{BC}|} = \frac{\pi/2 - 3\alpha}{\pi/2 - \alpha} = k \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{(1-k)\pi}{6-2k}.$$

Рассуждая аналогично, имеем

$$\frac{|\overset{\frown}{AB}|}{|\overset{\frown}{AD}|} = \frac{\pi/2 - 3\alpha}{2\alpha} = \frac{\pi - \frac{6-6k}{6-2k}\pi}{\frac{4-4k}{6-2k}\pi} = \frac{4k}{4-4k} \quad \Rightarrow \quad |\overset{\frown}{AB}| = \frac{k}{1-k}\,a \quad \Rightarrow \quad |\overset{\frown}{BC}| = \frac{1}{1-k}\,a.$$

В-1 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 4, отношение длин дуг AB и BC равно $3/7$, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги AB.

Ответ: 3.

Решение.

В-2 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 5, отношение длин дуг AB и BC равно $2/7$, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги BC.

Ответ: 7.

B-3 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 4, отношение длин дуг AB и BC равно 5/9, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги AB.

Ответ: 5.

B-4 Точки A, B, C и D расположены в указанном порядке на окружности таким образом, что длины дуг AD и CD равны 1, отношение длин дуг AB и BC равно 8/9, а также равны длины отрезков AD и CL, где L – точка пересечения отрезков AC и BD. Найдите длину дуги BC.

Ответ: 9.

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Найдите вероятность того, что в серии из 6-ти бросков выпадет не менее 3-х орлов. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ: 0.82

Решение. Пусть вероятность выпадения орла при одном броске равна p. Тогда вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна $C_5^3p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$, а вероятность выпадения ровно двух орлов в серии 4-х бросков равна $C_4^2 \cdot p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$. По условию $10p^3(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$, откуда $p = \frac{3}{5}$.

Тогда вероятность того, что в серии 6 бросков выпадет не менее 3-х орлов, равна $C_6^3p^3(1-p)^3 + C_6^4p^4(1-p)2 + C_6^5p^5(1-p) + C_6^6p^6 = \frac{513}{625} \approx 0.82$.

В варианте 2) p такая же, а вероятность выкинуть не менее 4 орлов за 6 бросков равна $C_6^4p^4(1-p)^2 + C_6^5p^5(1-p) + C_6^6p^6 = \frac{7\cdot 3^5}{5^5} = \frac{1701}{3125} \approx 0.54$

В-2 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Найдите вероятность того, что в серии из 6-ти бросков выпадет не менее 4-х орлов. Если необходимо, округлите ответ до сотых.

Ответ: 0.54

В-3 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 3-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

Ответ: 1138

В-4 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 4-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

Ответ: 4826

В-5 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 3-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m-n$.

Ответ: -112

В-6 Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Пусть вероятность того, что в серии из 6-ти бросков этой монеты выпадет не менее 4-х орлов, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m-n$.

Ответ: -1424

В-7 Андрей наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого он переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Найдите вероятность того, что в обоих случаях он получит тоже трёхзначное число. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.68

Решение. Наименьшее трехзначное число в 11-ричной системе счисления есть $100_{11} = 121_{10}$. Наименьшее трехзначное число в 9-ричной системе счисления очевидно будет меньше, чем 121.

Наибольшее трехзначное число в 9-ричной системе счисления есть $888_9 = 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^0 = 728_{10}$. Наибольшее трехзначное число в 11-ричной системе счисления больше, чем 728. Поэтому условию подойдут натуральные числа от 121 до 728. Таких чисел 728-120=608. Значит, искомая вероятность равна $\frac{608}{900} = \frac{152}{225} \approx 0.68$.

В-8 Борис наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого он переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Найдите вероятность того, что хотя бы в одном из двух случаев он получит не трёхзначное число. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.32

В-9 Валентина наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого она переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Вероятность того, что в обоих случаях она получит тоже трёхзначное число, равна $\frac{m}{n}$ (где m и n – натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

Ответ: 377

В-10 Галина наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого она переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Вероятность того, что хотя бы в одном из двух случаев она получит не трёхзначное число, равна равна $\frac{m}{n}$ (где m и n – натуральные числа и дробь несократима). Найдите значение $m+n$.

Ответ: 298

Задача 4 (10 баллов)

В-1 Найдите максимальное значение функции $f(x) = \sin^4 x + 2\cos^3 x$ на отрезке $\left[\arccos\frac{3}{4},\ \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $f_{\max} = \dfrac{265}{256} \approx 1.04$.

Решение. Вычисляя производную функции $f(x)$, имеем

$$f'(x) = 4\sin^3 x\cos x - 6\cos^2 x\sin x = \sin 2x(2\sin^2 x - 3\cos x) = -\sin 2x(\cos x + 2)(2\cos x - 1).$$

На указанном отрезке два нуля производной: $x = \pi/3$ (точка минимума) и $x = \pi/2$ (точка максимума). Вычислим значения функции в этих точках и в концах отрезка:

$$f\left(\arccos\frac{3}{4}\right) = \frac{265}{256}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{13}{16}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{217}{256},$$

откуда следует ответ.

В-2 Найдите максимальное значение функции $f(x) = \sin^4 x - 2\cos^3 x$ на отрезке $\left[\arccos\frac{1}{4},\ \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $f_{\max} = \dfrac{265}{256} \approx 1.04$.

В-3 Найдите минимальное значение функции $f(x) = \cos^4 x + 2\sin^3 x$ на отрезке $\left[-\arcsin\frac{1}{4},\ \arcsin\frac{3}{4}\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $f_{\min} = \dfrac{13}{16} = 0.8125 \approx 0.81$.

В-4 Найдите минимальное значение функции $f(x) = \cos^4 x - 2\sin^3 x$ на отрезке $\left[-\arcsin\frac{3}{4},\ \arcsin\frac{1}{4}\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $f_{\min} = \dfrac{13}{16} = 0.8125 \approx 0.81$.

Условие в общем виде

Решите неравенство

$$\frac{\log_a x}{\log_x c} + \log_b a \cdot \log_b c > 2\log_b x, \quad a, b, c > 1.$$

Ответ: $x \in (0;1) \cup \left(1; a^{\log_b c}\right) \cup \left(a^{\log_b c}; +\infty\right)$

Решение. Элементарными преобразованиями это неравенство приводится к эквивалентной системе

$$\begin{cases} (\log_a x - \log_b c)(\log_c x - \log_b a) > 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

откуда с учетом равенства $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ получаем ответ.

В-5 Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 7} + \log_5 2 \cdot \log_5 7 > 2\log_5 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

Ответ: 3

В-6 Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 5} + \log_7 2 \cdot \log_7 5 > 2\log_7 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

Ответ: 2

В-7 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_x 7} + \log_2 3 \cdot \log_2 7 > 2\log_2 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

Ответ: 22

В-8 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_x 2} + \log_7 3 \cdot \log_7 2 > 2\log_7 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

Ответ: 2

В-9 Решите неравенство

$$\frac{\log_7 x}{\log_x 3} + \log_2 7 \cdot \log_2 3 > 2\log_2 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

Ответ: 22

В-10 Решите неравенство

$$\frac{\log_7 x}{\log_x 2} + \log_3 7 \cdot \log_3 2 > 2\log_3 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n, при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1, n]$, являются решениями неравенства.

Ответ: 4

Задача 5 (10 баллов)

В-1 Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно 8.

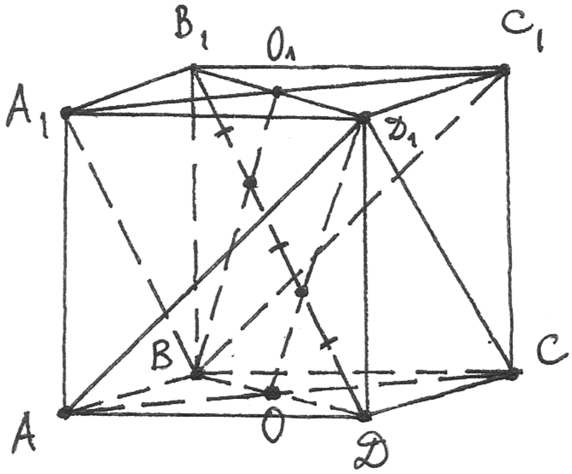
Ответ: 1152

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a, d — расстояние между прямыми AD_1 и A_1B. Пусть π_1, π_2 — плоскости A_1BC_1 и ACD_1 соответственно. Поскольку $BC_1 \| AD_1$ и $D_1C \| A_1B$, плоскости π_1 и π_2 параллельны, поэтому d равно расстоянию между плоскостями π_1 и π_2.

Покажем, что диагональ DB_1 куба перпендикулярна плоскостям π_1 и π_2, и точками пересечения с этими плоскостями делится на три равные части.

При повороте куба на 120° вокруг DB_1 точки A_1, B, C_1 переходят друг в друга, а значит, плоскость π_1 остаётся на месте (переходит сама в себя). Следовательно, $DB_1 \perp \pi_1$. Пусть O, O_1 - центры граней $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Тогда в сечении куба BB_1D_1D получаем $BO_1 \| D_1O$, $B_1O_1 = O_1D_1 = BO = OD$. Поэтому DB_1 делится отрезками BO_1 и D_1O на три равные части.

Таким образом, $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда $a = d\sqrt{3}$. Площадь полной поверхности куба равна $S = 6a^2 = 18d^2 = 18 \cdot 8^2 = 1152$.



В-2 Найдите объём куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно $4\sqrt{3}$.

Ответ: 1728

В-3 Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно 7.

Ответ: 882

В-4 Найдите объём куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно $5\sqrt{3}$.

Ответ: 3375

В-5 Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно 9.

Ответ: 1458

В-6 Найдите объём куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно $6\sqrt{3}$.

Ответ: 5832

В-7 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 2, а площадь основания — $\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SAB. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.71 ($\approx \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Решение. Основание пирамиды — правильный шестиугольник; если его сторона равна a, то его площадь равна $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \sqrt{3}$, откуда $a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Тогда радиус окружности, вписанной в основание, равен $a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Каждая боковая грань пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием $a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и площадью $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, откуда апофема также равна $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Тогда в силу теоремы о трёх перпендикулярах и теоремы Пифагора высота пирамиды равна $\sqrt{\dfrac{1}{6}}$.

Заметим, что у пирамиды $SABE$ общая высота с пирамидой $SABCDEF$, а площадь её основания равна $\dfrac{1}{2}AB \cdot AE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, откуда её объём равен $V(SABE) = \dfrac{\sqrt{2}}{18}$. С другой стороны, этот объём втрое меньше произведения площади грани SAB на расстояние от вершины E до плоскости этой грани, поэтому указанное расстояние равно $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$.

Докажем, что расстояние от точки E до плоскости грани SAB — максимально возможное расстояние от точки пирамиды $SABCDEF$ до плоскости грани SAB (такое же расстояние до этой плоскости будет от любой точки ребра DE). Заметим сначала, что максимум достигается на поверхности пирамиды, а не внутри её: перпендикуляр, опущенный на плоскость SAB из внутренней точки пирамиды, может быть продолжен за эту точку до пересечения с поверхностью пирамиды, при этом будет найдена точка на поверхности, более удаленная от плоскости SAB по сравнению с исходной. Далее, если точка M принадлежит некоторой боковой грани пирамиды, то точка пересечения луча SM с соответствующим ребром основания находится дальше от плоскости SAB, чем сама точка M (это легко вывести из подобия треугольников), поэтому максимум может достигаться только в точках основания пирамиды. Наконец, лежащая в основании пирамиды точка тем дальше от плоскости SAB, чем она дальше от прямой AB (это легко следует из теоремы о трёх перпендикулярах и подобия треугольников). Поэтому максимум достигается в точках ребра DE, которое параллельно плоскости SAB (так как $AB \| DE$), а значит, все его точки равноудалены от плоскости SAB.

В-8 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 9, а площадь основания — $4\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SDE. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

Ответ: 1.81 ($\approx \sqrt{\frac{88}{27}}$)

В-9 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 8, а площадь основания — $2\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SCD. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

Ответ: 1.80 ($\approx \sqrt{\frac{13}{4}}$)

В-10 Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 9, а площадь основания — $3\sqrt{3}$. Найдите все точки пирамиды, удаленные на максимально возможное расстояние от плоскости боковой грани SEF. В ответе укажите это расстояние, при необходимости округлив его значение до двух знаков после запятой.

Ответ: 2

Задача 6 (10 баллов)

В-1 Фабрика производит $n > 15\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы фабрики на производство одной игрушки составляют не менее $\dfrac{126\,000}{n}+9-\left|3-\dfrac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\dfrac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Ответ: 24 000

Решение. Обозначим расходы на производство n игрушек в месяц через $f(n)$. По условию:

$$f(n) \geqslant g(n) := n\left(\frac{126000}{n}+9-\left|3-\frac{54\,000}{n}\right|-18-\frac{1}{4000}n\right),$$

т.е. $f(n) \geqslant g(n) = \frac{n^2}{4000} - 9n - |3n-54000| + 126000$.

1) Пусть $n \geqslant 18000$. Тогда $g(n) = \frac{n^2}{4000} - 12n - 180000 \geqslant g(n_0)$, где $n_0 = \frac{12}{1/2000} = 24000$. При этом $g(24000) = 36000$.

2) Пусть $0 < n < 18000$. Тогда $g(n) = \frac{n^2}{4000} - 6n + 72000 \geqslant g(n_0)$, где $n_0 = \frac{6}{1/2000} = 12000$. При этом $g(12000) = 36000$.

Таким образом, наименьшее значение расходов в месяц равно 36000 руб. и достигается оно при $n = 24000$ или $n = 12000$.

В-2 Фабрика производит $n > 400$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы предприятия на изготовление одной ели составляют не менее $\dfrac{40\,500}{n}+270-\left|90-\dfrac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\dfrac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Ответ: 600

В-3 Фабрика производит $n < 20\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы предприятия на изготовление одной игрушки составляют не менее $\dfrac{126\,000}{n}+9-\left|3-\dfrac{54\,000}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18-\dfrac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Ответ: 12 000

В-4 Фабрика производит $n < 500$ искусственных елей в месяц, и производство является прибыльным. Известно, что при изготовлении n искусственных елей в месяц расходы фабрики на изготовление одной ели составляют не менее $\dfrac{40\,500}{n}+270-\left|90-\dfrac{40\,500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждой ели при этом не превосходит $540-\dfrac{3}{10}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Ответ: 300

В-5 Завод производит $n > 300$ автомобилей в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 20000}{n - 300}$. Сколько автомобилей в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

Ответ: 565

Решение. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 - 20000}{x - 300}$, тогда $f'(x) = \dfrac{x^2 - 600x + 20000}{(x-300)^2}$. Функция f' меняет знак в точках $300 \pm 100\sqrt{7}$. При $x \in (300; 300 + 100\sqrt{7})$ имеем $f'(x) < 0$, и функция f убывает, а при $x > 300 + 100\sqrt{7}$ имеем $f'(x) > 0$, и функция f возрастает. Значит, наименьшее значение на луче $(300; +\infty)$ функция f принимает в точке $300 + 100\sqrt{7} \in (564; 565)$, а наименьшее значение при целых $x > 300$ — в одной из точек 564 и 565. Поскольку десятичный логарифм — монотонно возрастающая функция, то же самое верно и для функции $g(x) = \lg f(x)$. Нетрудно проверить, что $f(564) > f(565)$, а значит, и $g(564) > g(565)$. Поэтому наименьшие издержки завод понесет, выпуская по 565 автомобилей в месяц.

В-6 Завод производит $n > 400$ катеров в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 50000}{n - 400}$. Сколько катеров в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

Ответ: 732

В-7 Завод производит $n > 500$ телевизоров в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 80000}{n - 500}$. Сколько телевизоров в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

Ответ: 912

В-8 Завод производит $n > 600$ стиральных машин в месяц. Издержки зависят от объема производства как $\lg \dfrac{n^2 - 50000}{n - 600}$. Сколько стиральных машин в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

Ответ: 1157

Задача 7 (10 баллов)

B-1 Найдите сумму всех целых a, при которых неравенство

$$(2-a)4^{\cos 2x}+2(a-5)\frac{1}{4^{\sin^2 x}}+1<0$$

выполнено для всех значений x.

Ответ: 6

Решение. $a\in(-0.5,4)$, сумма целых значений равна 6. После замены $4^{\cos^2 x}=t$ изучаем, отрицателен ли квадратный трёхчлен $(2-a)t^2+2(a-5)t+4$ при $t\in[1,4]$.

B-2 Найдите сумму всех целых значений a, при которых неравенство

$$(2+a)4^{\cos 2x}-2(a+5)\frac{1}{4^{\sin^2 x}}<-1$$

выполнено для всех значений x.

Ответ: -6

B-3 Найдите сумму всех целых значений a, при которых неравенство

$$(1-a)4^{\cos 2x}+2(a-4)4^{-\sin^2 x}<-1$$

выполнено для всех значений x.

Ответ: 2

B-4 Найдите сумму всех целых значений a, при которых неравенство

$$(1+a)4^{\cos 2x}-2(a+4)4^{-\sin^2 x}+1<0$$

выполнено для всех значений x.

Ответ: -2

Задача 8 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса $\angle BAD$, пересекающая прямую BC в точке K. В треугольник ABK вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон AB и BK, если $AB = 4$, $\angle BAD = \dfrac{\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.93 $(\approx 2(2\sqrt{3}-3))$

Решение. Если через N, L, M обозначить точки касания окружности и сторон AB, BK, AK соответственно, получатся подобные равнобедренные треугольники NBL и ABK, причем BM будет высотой, медианой и биссектрисой треугольника ABK. Тогда $AN = AM = AB\cos\frac{\angle BAD}{2}$, $NB = AB - AN = AB(1-\cos\frac{\angle BAD}{2})$, $NL = AK \cdot NB : AB$.

В-2 В параллелограмме $KLMN$ проведена биссектриса $\angle LKN$, пересекающая прямую LM в точке P. В треугольник KLP вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон KL и LP, если $KL = 4\sqrt{5}$, $\angle MNK = \dfrac{2\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 2.08 $(\approx 2\sqrt{5}(2\sqrt{3}-3))$

В-3 В параллелограмме $FEGH$ проведена биссектриса $\angle EFH$, пересекающая прямую EG в точке A. В треугольник FEA вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон FE и EA, если $FE = 12\sqrt{7}$, $\angle HFE = \dfrac{\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 7.37 $(\approx 6\sqrt{7}(2\sqrt{3}-3))$

В-4 В параллелограмме $PQRS$ проведена биссектриса $\angle QPS$, пересекающая прямую QR в точке H. В треугольник PQH вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружностью сторон PQ и QH, если $PQ = 2\sqrt{3}$, $\angle RSP = \dfrac{2\pi}{3}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.80 $(\approx 6-3\sqrt{3})$

Задача 9 (10 баллов)

В-1 Решите систему

$$\begin{cases} 6^{y+1} \cdot 5^{|2+x-x^2|+1+\log_5 6} = 5, \\ 3\sqrt{2-y} \le 6 - |y+2|. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -3

Решение. Сначала решим неравенство. Заметим, что в левой части стоит убывающая функция $f(y) = 3\sqrt{2-y}$, определённая при $y \le 2$, а в правой части — функция $g(y) = 6-|y+2|$, возрастающая при $y \le -2$ и убывающая при $y \ge -2$. При этом $f(-2) = g(-2) = 6$, $f(1) = g(1) = 3$. Отсюда ясно, что при $y < -2$ неравенство не выполнено. В силу выпуклости функции f оно также не выполнено при $y \in (-2;1)$, а при $y \in (1;2]$ — выполнено, поскольку на промежутке $(1;2)$ имеем $f'(y) - g'(y) = -\dfrac{3}{2\sqrt{2-y}} + 1 < 0$ и $f(2) = 0 < g(2) = 2$. Таким образом, множество решений неравенства имеет вид $\{-2\} \cup [1;2]$.

Уравнение преобразуем к виду $6^{y+2} \cdot 5^{|2+x-x^2|} = 1$. На множестве решений неравенства имеем $y+2 \in \{0\} \cup [3;4]$, поэтому первый сомножитель в левой части уравнения всегда не меньше 1. Поскольку $|2+x-x^2| \ge 0$ при всех значениях x, второй сомножитель в левой части уравнения также всегда не меньше 1. Значит, равенство возможно только при $6^{y+2} = 5^{|2+x-x^2|} = 1$, откуда $y = -2$ (это значение также удовлетворяет неравенству) и $x = -1$ или $x = 2$. Выражение $x+y$ на решениях системы принимает минимальное значение при $y = -2$ и $x = -1$ и в этом случае равно -3.

В-2 Решите систему

$$\begin{cases} 3^{y+3} \cdot 2^{|2+3x+x^2|-\log_2 3} = 3, \\ 3\sqrt{3-y} \le 6 - |y+1|. \end{cases}$$

В ответе укажите максимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -2

В-3 Решите систему

$$\begin{cases} 2^{5-y} \cdot 3^{|5x-x^2-6|-\log_3 2} = 2, \\ 3\sqrt{y+1} \le 6 - |3-y|. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 5

В-4 Решите систему

$$\begin{cases} 5^{4-y} \cdot 7^{|3x-2-x^2|+1+\log_7 5} = 7, \\ 3\sqrt{y-1} \le 6 - |5-y|. \end{cases}$$

В ответе укажите максимальное значение, которое может принимать сумма $x+y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 7

Задача 10 (10 баллов)

В-0 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2021}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 10.

Решение. Заметим, что $f(-3/5) = -\frac{27}{125} - \frac{27}{125} + 1 < 0$, $f(-1/2) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 > 0$, $f(3/5) = \frac{27}{125} - \frac{27}{125} + 1 = \frac{17}{125} > 0$, $f(7/10) = \frac{343}{1000} - \frac{147}{100} + 1 = \frac{343-470}{1000} < 0$, $f(2) = 8 - 12 + 1 < 0$, $f(3) = 27 - 27 + 1 > 0$. Следовательно, кубический многочлен f имеет три вещественных корня $x_1 < x_2 < x_3$, причем $-3/5 < x_1 < -1/2$, $3/5 < x_2 < 7/10$, $2 < x_3 < 3$ ($x_3 = \hat{x}$). Для каждого целого неотрицательного n определим число $a_n := x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Очевидно что $a_0 = 3$, далее из теоремы Виета следует, что $a_1 = 3$, $a_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9 - 0 = 9$. Если равенства $x_i^3 = 3x_i^2 - 1$ умножить соответственно на x_i^n при $i = 1, 2, 3$ и сложить, то получим:

$$x_1^{n+3} + x_2^{n+3} + x_3^{n+3} = 3(x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_3^{n+2}) - (x_1^n + x_2^n + x_3^n),$$

т.е. имеет место рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_n.$$

Очевидно, что $[x_3^n] = a_n - 1$.

Далее рассмотрим остатки последовательности a_n при делении на 17. Последовательность остатков имеет цикл длины 16:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
3	3	9	7	1	11	9	9	16	5	6	2	1	14	6	0	3	3	9

Так как $2021 = 126 \cdot 16 + 5$, то $a_{2021} \pmod{17} = a_5 \pmod 17 = 11$. Поэтому $[\hat{x}^{2021}] \pmod{17} = 10$.

В-1 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2026}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 5.

В-2 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2027}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 1.

В-3 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2028}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 0.

В-4 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2029}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 13.

В-5 Пусть $\hat{x}$ — наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найти остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2030}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее числа a.

Ответ: 5

В-6 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\cos^3 x + 1 = 2\sqrt[3]{4\cos x - 1},$$

принадлежащих отрезку $[0;\pi]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 4.82

Решение. Замена $t = 2\cos x$ приведёт уравнение к виду $t^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2t-1} \Leftrightarrow (\frac{t^3+1}{2})^3 = 2t - 1 \Leftrightarrow f(f(t)) = t$, где $f(t) = \frac{t^3+1}{2}$. Функция f строго возрастает, поэтому последнее уравнение равносильно $f(t) = t \Leftrightarrow t^3 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Поэтому $\cos x = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, и корни уравнения $x = \frac{\pi}{3}, x = \arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, x = \pi - \arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Можно доказать, что $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Тогда $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{2\pi}{5}$, и сумма корней равна $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{23\pi}{15}$.
В других вариантах корни равны: 2) $x = -\frac{\pi}{6}, x = \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{4} = -\frac{\pi}{10}, x = \arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{3\pi}{10}$. В сумме $\frac{\pi}{30}$. 3) $x = \frac{2\pi}{3}, x = \arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{3\pi}{5}, x = \arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\pi}{5}$. В сумме $\frac{22\pi}{15}$. 4) $x = \frac{\pi}{6}, x = \arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\pi}{10}, x = -\arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4} = -\frac{3\pi}{10}$. В сумме $-\frac{\pi}{30}$.

В-7 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\sin^3 x - 1 = 2\sqrt[3]{4\sin x + 1},$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 0.10

В-8 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\cos^3 x - 1 = 2\sqrt[3]{4\cos x + 1},$$

принадлежащих отрезку $[0;\pi]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 4.61

В-9 Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\sin^3 x + 1 = 2\sqrt[3]{4\sin x - 1},$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: -0.10
