Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1.

В-1 Какое из чисел больше:

$$A=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{87}{(43\cdot 44)^2}+\frac{89}{(44\cdot 45)^2} \text{ или } B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Ответ: B.

Решение. Так как $\dfrac{2n+1}{(n(n+1))^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$, то

$$A=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{43^2}-\frac{1}{44^2}\right)+\left(\frac{1}{44^2}-\frac{1}{45^2}\right)=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{45^2}=\frac{45^2-1}{45^2}=\frac{2024}{2025}.$$

Ввиду того, что $B=\dfrac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}}=1$, получаем $A<B$.

В-2 Какое из чисел больше:

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{77}{(38\cdot 39)^2}+\frac{79}{(39\cdot 40)^2}?$$

Ответ: A. Комментарий: $A=1$, $B=\dfrac{1599}{1600}$.

В-3 Какое из чисел больше:

$$A=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{97}{(48\cdot 49)^2}+\frac{99}{(49\cdot 50)^2} \text{ или } B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Ответ: B. Комментарий: $A=\dfrac{2499}{2500}$, $B=1$.

В-4 Какое из чисел больше:

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \text{ или } B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{117}{(58\cdot 59)^2}+\frac{119}{(59\cdot 60)^2}?$$

Ответ: A. Комментарий: $A=1$, $B=\dfrac{3599}{3600}$.

Задача 2.

В-1 Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Ответ: 6 или 8.

Решение. Двузначные числа, делящиеся на 19, — это 19, 38, 57, 76, 95. Двузначные числа, делящиеся на 23, — это 23, 46, 69, 92. Так как первая цифра 4, то вторая цифра 6, третья 9, а четвертая 2 или 5. Если четвертая цифра 2, то продолжение: 2 – 3 – 8 – дальше продолжения нет. Значит, четвертая цифра 5, и продолжение: 5 – 7 – 6 – 9 – 5 – 7 – 6 и так далее. Тогда мы получаем почти периодическую последовательность: 4 – 6 – 9 – 5 – 7 – 6 – 9 – 5 – 7 – . . . , в которой период равен 4. Тогда на 2022 месте будет цифра 6, так как $2022 = 1+4\cdot505+1$. Выше было показано, что цифра 2 встретиться в начальных позициях загаданного числа не может. Но при этом она может первой, второй или третьей с конца. Поэтому возможна ситуация, когда в предыдущей последовательности после последней цифры 9 стоят 2 – 3 – 8. Тогда последняя цифра числа 8.

В-2 Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 1. Какой цифрой оно заканчивается?

Ответ: 6 или 8.

В-3 Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

Ответ: 3 или 7.

В-4 Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 9. Какой цифрой оно заканчивается?

Ответ: 2 или 5.

Задача 3.

В-1 Есть функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022)))))...)),$$

где функция f применяется 1303 раза.

Ответ: $1/\sqrt[5]{1-2022^5}$

Решение. Для нечётных n

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}},$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-\frac{1}{1-x^n}}} = \sqrt[n]{1-\frac{1}{x^n}},$$

$$f(f(f(x))) = \sqrt[n]{1-(1-x^n)} = x,$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(x).$$

Видим периодичность, период $= 3$. Остаток от деления 1303 на 3 равен 1, поэтому

$$f(f(f(f(f(...f(2022)))))...)) = f(2022).$$

В-2 Есть функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022)))))...)),$$

где функция f применяется 1304 раза.

Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

В-3 Есть функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022)))))...)),$$

где функция f применяется 1305 раз.

Ответ: 2022

В-4 Есть функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(...f(2022)))))...)),$$

где функция f применяется 1306 раз.

Ответ: $1/\sqrt[11]{1-2022^{11}}$

Задача 4.

В-1 Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 11 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Ответ: $\dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}$.

Решение. *Условие в общем виде:* Около (или внутри) конуса с углом при вершине в осевом сечении равном 2α расположены n шаров радиуса r, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Ответ в общем виде: $R = r\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$ или $R = r\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$.

Решение в общем виде. Пусть O — центр окружности основания конуса, радиуса R, Q_1 — центр одного из шаров радиуса r, H_1 — точка касания этого шара с плоскостью основания (шар либо внутри, либо вне конуса см. рис.1), H_2 — точка касания соседнего шара с плоскостью основания конуса (см. рис.2). Значит, для внешнего касания $AH_1 = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$, а для внутреннего – $AH_1 = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$ (см. рис.1). Так как каждый шар касается двух соседних, то точки касания этих шаров с плоскостью основания конуса расположены в вершинах правильного -угольника вписанного в окружность с центром в точке O, радиуса OH_1 и стороной, равной $2r$. Поэтому $r = OH_1 \sin\frac{\pi}{n}$, где $OH_1 = R + AH_1$ или $OH_1 = R - AH_1$.

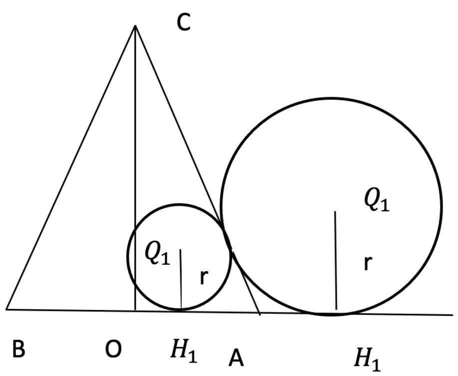

Рис.1

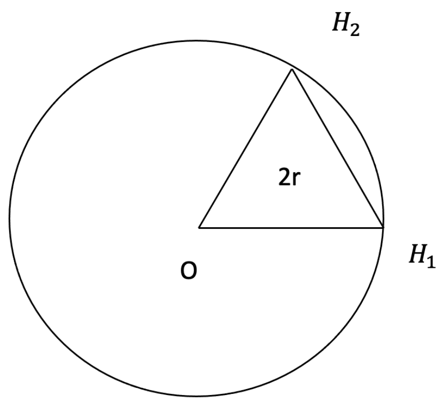

Рис.2

В-2 Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 13 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Ответ: $\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{13}} + 2\sqrt{3}$.

В-3 Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 17 шаров радиуса 2, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Ответ: $\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

В-4 Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Внутри этого конуса расположены 19 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Ответ: $\dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$.

Задача 5.

В-1 Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 100t; \quad b = 2^t - 16; \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

Ответ: $(-10; -4\pi + \frac{5\pi}{6}) \cup (-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}) \cup (2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}) \cup (10; +\infty)$

Решение. Напрямую значения a, b, c сравнивать сложно. Однако, чтобы среднее из трёх чисел было положительным, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере два числа из тройки были положительны.

$a = t^3 - 100t = t(t-10)(t+10) > 0$ при $t \in (-10; 0) \cup (10; +\infty)$.
$b = 2^t - 16 > 0$ при $t > 4$.
$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$ при $t \in (2\pi n + \frac{\pi}{6}; 2\pi n + \frac{5\pi}{6})$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Нужно, чтобы хотя бы два из трех чисел были положительны.
$a > 0$ и $b > 0$ при $t > 10$, область $(10, +\infty)$ идёт в ответ.
$a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$ при $t \in (-\infty, -10] \cup [0, 4]$, эта область в ответе быть не может.
На оставшейся области $t \in (-10, 0) \cup (4, 10]$ положительно только одно из чисел a, b. Значит, в ответ пойдут те её части, где $c > 0$. Посмотрим, как пересекаются $t \in (-10, 0) \cup (4, 10]$ и $t \in (2\pi n + \frac{\pi}{6}; 2\pi n + \frac{5\pi}{6})$, где $n \in \mathbb{Z}$.
При $n = 0$ получим интервал $t \in (\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$. Он с областью $t \in (-10, 0) \cup (4, 10]$ не пересекается, ведь $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} < 4$.
При $n = 1$ получим интервал $t \in (2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6})$. Он лежит в области целиком, ведь $4 < 2\pi + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{5\pi}{6} < 10$. Интервал идёт в ответ.
При $n = -1$ получим интервал $t \in (-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6})$. Он тоже лежит в области целиком, ведь $-10 < -2\pi + \frac{\pi}{6} < -2\pi + \frac{5\pi}{6} < 0$. Интервал идёт в ответ.
При $n = -2$ получим интервал $t \in (-4\pi + \frac{\pi}{6}; -4\pi + \frac{5\pi}{6})$. Тут получается такое неравенство: $-4\pi + \frac{\pi}{6} < -10 < -4\pi + \frac{5\pi}{6}$, интервал пересекается с областью $t \in (-10, 0) \cup (4, 10]$, пересечение — это множество $(-10, -4\pi + \frac{5\pi}{6})$, которое пойдёт в ответ.
При остальных n интервалы заведомо лежат либо далеко левее -10, либо правее 10, и на ответ не повлияют.

В итоге ответ складывается из объединения множеств $(10, +\infty)$, $(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6})$, $(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6})$, $(-10, -4\pi + \frac{5\pi}{6})$.

В-2 Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 81t; \quad b = 11^t - 121; \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

Ответ: $(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}) \cup (2; \frac{5\pi}{6}) \cup (2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}) \cup (9; +\infty)$

В-3 Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 121t; \quad b = 2^t - 32; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Ответ: $t \in (-11; -4\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (2\pi + \frac{\pi}{3}; 2\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (11; +\infty)$

B-4 Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 144t; \quad b = 2^t - 256; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Ответ: $(-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (-2\pi + \frac{\pi}{3}; -2\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (8; 2\pi + \frac{2\pi}{3}) \cup (12; +\infty)$

Задача 6.

В-1 При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (2 - a - a^2) \operatorname{tg}^2 x + (a^2 - 2a - 2) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a = 0$.

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - a)(a \operatorname{tg} x + 2) = 0$, откуда при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ либо $\operatorname{tg} x = 1$ и $x = \frac{\pi}{4}$, либо $\operatorname{tg} x = a$ и $x = \operatorname{arctg} a$, либо (при $a \neq 0$) $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{a}$ и $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{a}$. Таким образом, данное уравнение имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ два или три различных корня (второй корень не может совпадать с третьим, так как $\operatorname{arctg} a$ и $-\operatorname{arctg} \frac{2}{a}$ имеют разные знаки при любом $a \neq 0$ в силу нечётности арктангенса).

Случай 1: $a = 0$. Тогда остаётся два корня $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = 0$, которые отличаются на $\frac{\pi}{4}$.

Случай 2: $a > 0$. Тогда разность между корнями $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{a} < 0$ больше, чем $\frac{\pi}{4}$.

Случай 3: $a < 0$. Тогда разность между корнями $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \operatorname{arctg} a < 0$ больше, чем $\frac{\pi}{4}$.

В-2 При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (1 - a - 2a^2) \operatorname{tg}^2 x + (2a^2 - 2a - 1) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a = 0$.

В-3 При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2) \operatorname{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2) \operatorname{ctg} x + 4a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0; \pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a = 0$.

В-4 При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{ctg}^3 x + (a^2 - a - 3) \operatorname{ctg}^2 x + (3 - 3a - a^2) \operatorname{ctg} x + 3a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(0; \pi)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a = 0$.

Задача 7.

В-1 Высота BD остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке H. Точка K лежит на отрезке AC так, что величина угла BKH максимальна. Найдите DK, если $AD = 2$, $DC = 3$.

Ответ: $\sqrt{6}$

Решение. Чем больше острый угол, тем больше его тангенс. Поэтому условие максимальности угла BKH можно заменить на условие максимальности его тангенса. По формуле тангенса разности имеем

$$\operatorname{tg} \angle BKH = \operatorname{tg}\big(\angle BKD - \angle DKH\big) = \frac{\operatorname{tg} \angle BKD - \operatorname{tg} \angle DKH}{1 + \operatorname{tg} \angle BKD \cdot \operatorname{tg} \angle DKH} = \frac{\dfrac{BD}{DK} - \dfrac{DH}{DK}}{1 + \dfrac{BD}{DK} \cdot \dfrac{DH}{DK}}$$
$$= \frac{(BD - DH) \cdot DK}{DK^2 + BD \cdot DH}.$$

Максимум этого выражения достигается при том же значении DK, что и минимум выражения $y = \dfrac{x^2 + BD \cdot DH}{x} = x + \dfrac{BD \cdot DH}{x}$, где $x = DK$. Производная y' равна $1 - \dfrac{BD \cdot DH}{x^2}$ и обращается в нуль при $x = \sqrt{BD \cdot DH}$ (нас интересуют только положительные значения x).

Заметим, что $DH : AD = \operatorname{tg} \angle HAD = \operatorname{ctg} \angle BCD = DC : BD$, откуда $AD \cdot DC = DH \cdot BD$. Таким образом, $x = \sqrt{AD \cdot DC}$.

В-2 Высота AM остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке O. Точка K лежит на отрезке BC так, что величина угла AKO максимальна. Найдите MK, если $BM = 5$, $MC = 3$.

Ответ: $\sqrt{15}$

В-3 Высота CL остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке Q. Точка S лежит на отрезке AB так, что величина угла CSQ максимальна. Найдите LS, если $AL = 2$, $LB = 5$.

Ответ: $\sqrt{10}$

В-4 Высота BF остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке P. Точка N лежит на отрезке AC так, что величина угла BNP максимальна. Найдите FN, если $AF = 7$, $FC = 2$.

Ответ: $\sqrt{14}$
