Задача 1.

В-1

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $2x-3$, $\frac{18}{x}+1$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

В-2

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $3x-2$, $\frac{8}{x}+1$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

В-3

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $2x-5$, $\frac{50}{x}+3$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

В-4

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $3x-5$, $\frac{50}{x}+3$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Задача 2.

В-1

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 32 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 24 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 3 минуты и 54 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 42 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 36 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 34 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Задача 3.

В-1

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{13}$.

В-2

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{26}$.

В-3

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $BE = AD = 4$.

В-4

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $BE = AD = 6$.

Задача 4.

В-1

Маша плотно уложила 165 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-2

Маша плотно уложила 220 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-3

Маша плотно уложила 286 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-4

Маша плотно уложила 364 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Задача 5.

В-1

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+\frac{53}{18}y-\frac{143}{9}z}{z}=\dfrac{\frac{3}{8}x-\frac{17}{4}y+z}{y}=1$. Найдите $\dfrac{y}{z}$.

В-2

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+\frac{53}{18}y-\frac{157}{9}z}{z}=\dfrac{\frac{3}{8}x-\frac{17}{4}y+z}{y}=1$. Найдите $\dfrac{y}{z}$. Ответ округлите до сотых.

В-3

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{y+\frac{53}{18}z-\frac{121}{2}x}{x}=\dfrac{\frac{3}{8}y-\frac{4}{3}z+x}{z}=1$. Найдите $\dfrac{z}{x}$.

В-4

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{z+\frac{53}{18}x-\frac{55}{2}y}{y}=\dfrac{\frac{3}{8}z-\frac{4}{3}x+y}{x}=1$. Найдите $\dfrac{x}{y}$.

Задача 6.

B-1

Найдите наименьшее значение выражения $4x+9y+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{y-5}$ при условии, что $x>4$ и $y>5$.

B-2

Найдите наименьшее значение выражения $9x+4y+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{y-4}$ при условии, что $x>3$ и $y>4$.

B-3

Найдите наименьшее значение выражения $4x+9y+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}$ при условии, что $x>1$ и $y>2$.

B-4

Найдите наименьшее значение выражения $9x+4y+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{y-6}$ при условии, что $x>5$ и $y>6$.

Задача 7.

В-1

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = 8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

В-2

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = 16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

В-3

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = -8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

В-4

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = -16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Задача 8.

В-... *(конкретные варианты ниже)*

В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен a. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен b.

В-1

В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен 5. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен 3.

В-2

В прямоугольнике $CDEF$ точка K лежит на стороне CD таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KDEF$, равен 7. Найдите площадь прямоугольника $CDEF$, если радиус окружности, вписанной в треугольник CKF, равен 3.

В-3

В прямоугольнике $KLMN$ точка P лежит на стороне MN таким образом, что радиус окружности, вписанной в треугольник KPN, равен 6. Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KLMP$, равен 10.

В-4

В прямоугольнике $EFGH$ точка T лежит на стороне EH таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $FGHT$, равен 9. Найдите площадь прямоугольника $EFGH$, если радиус окружности, вписанной в треугольник EFT, равен 5.

Задача 9.

В-1

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(111) + A(112) + \ldots + A(218) + A(219)$.

Ответ: 12045

Решение. Наибольшие нечётные делители никаких двух из данных чисел не могут совпасть, так как числа с одинаковыми наибольшими нечётными делителями либо равны, либо отличаются минимум в 2 раза. Значит, наибольшие нечётные делители чисел $111, 112, \ldots, 218, 219$ отличаются друг от друга. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел от $n+1$ до $2n$ есть n различных нечётных чисел, которые не превышают $2n$. Следовательно, это числа $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Если к набору чисел добавить число 220, то искомая сумма будет равна $1 + 3 + 5 + \ldots + 219 - A(220) = \frac{1+219}{2} \cdot 110 - 55 = 110^2 - 55 = 12045$.

В-2

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(113) + A(114) + \ldots + A(222) + A(223)$.

Ответ: 12537

В-3

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(115) + A(116) + \ldots + A(226) + A(227)$.

Ответ: 12939

В-4

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(117) + A(118) + \ldots + A(230) + A(231)$.

Ответ: 13427
