

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2020/21 учебного года для 9 классов

Задача 1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т.д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

Задача 2. Сколько существует делителей числа 2021^{2021} , кубический корень из которых является натуральным числом?

Задача 3. Решите систему

$$\begin{cases} |x^4 - 625x^2| \neq x^4 - 625x^2, \\ |6x^2 - 257x + 251| + 6x^2 - 257x + 251 = 0. \end{cases}$$

Задача 4. Сколько существует троек чисел a, b, c , каждое из которых служит корнем соответствующего уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?

Задача 5. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}$ при $x > 0$.

Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC со стороной $AC = 1$ провели высоту BH , в треугольнике BHC — биссектрису CL , в треугольнике BLC — медиану BM . Прямая AL пересекает сторону BC в точке K , причём $\angle BHK = \angle MHC = 15^\circ$. Найдите площадь четырёхугольника $KLHM$.

Задача 7. На числовой прямой отмечены 200 точек, имеющие координаты $1, 2, \dots, 200$. Двое игроков по очереди ставят в любую из ещё незанятых точек число «0» или число «1». Когда все возможные ходы сделаны, рассматриваются 199 отрезков $[1; 2], [2; 3], [3; 4], \dots, [199; 200]$ и подсчитываются баллы за каждый отрезок: если концы отрезка содержат одинаковые числа, то 1 балл получает первый игрок, если разные — то второй.

а) Кто из игроков может обеспечить себе большую сумму баллов независимо от ходов соперника?

б) С каким максимальным преимуществом одного из игроков может закончиться эта игра (при условии, что каждый игрок играет наилучшим для себя образом)?