Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2020/21 учебного года для 7-8 классов

Задача 1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью еще четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т.д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

Задача 2. Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

Задача 3. Назовем составное натуральное число n «интересным», если все его натуральные делители можно выписать в порядке возрастания, и при этом каждый следующий делитель делится на предыдущий. Найти все «интересные» натуральные числа от 20 до 90 (включительно).

Задача 4. Решите уравнение:

$$(x+1)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+\ldots+(x+2021)^2=x^2+(x-2)^2+(x-4)^2+\ldots+(x-2020)^2.$$

Задача 5. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $AM=MN=NC$. На стороне AC выбраны такие точки P и Q, что $MQ\|BC$, $NP\|AB$. Известно, что $PQ=BM$. Найдите угол MQB.

Задача 6. Наташа хочет выложить мозаикой число 2021, показанное на рисунке. У неё есть 4 одинаковые плитки размером 1×1 клетку и 24 одинаковые плитки размером 1×2 клетки. Сколькими способами Наташа может осуществить задуманное?