Задача 1.

В-1

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $2x-3$, $\dfrac{18}{x}+1$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

В-2

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $3x-2$, $\dfrac{8}{x}+1$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

В-3

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $2x-5$, $\dfrac{50}{x}+3$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

В-4

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $3x-5$, $\dfrac{50}{x}+3$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

В-5 Число A, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 14,6, а в десятичной системе счисления равно 16,5. Число B в системе счисления с основанием n равно 19,3. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

В-6 Число A, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 15,4, а в десятичной системе счисления равно 21,25. Число B в системе счисления с основанием n равно 27,8. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

В-7 Число A, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 17,3, а в десятичной системе счисления равно 19,25. Число B в системе счисления с основанием n равно 22,6. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

В-8 Число A, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 14,8, а в десятичной системе счисления равно 20,5. Число B в системе счисления с основанием n равно 24,4. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

Задача 2.

В-1

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 32 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 24 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 3 минуты и 54 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 42 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 36 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 34 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

В-5

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 30 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 36 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 10 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

В-6

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 30 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 24 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 15 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

В-7

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 36 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 24 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 9 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

В-8

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 56 м за 8 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 42 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 14 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 9,57

В-9

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 42 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 28 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 14 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

В-10

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 36 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 27 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 12 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Задача 3.

В-1

Маша плотно уложила 165 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-2

Маша плотно уложила 220 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-3

Маша плотно уложила 286 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-4

Маша плотно уложила 364 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-5 Маша плотно уложила 506 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

.

В-6 Маша плотно уложила 650 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

.

В-7 Маша плотно уложила 819 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

В-8 Маша плотно уложила 1015 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Задача 4.

В-1

Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равные 3 и 4 соответственно, пересекаются под углом $75°$. Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника?

В-2

Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $KLMN$, если диагонали KM и LN этого четырёхугольника равны 12 и 5 соответственно и пересекаются под углом $15°$?

В-3

Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равные 5 и 4 соответственно, пересекаются под углом $22{,}5°$. Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника?

В-4

Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $KLMN$, если диагонали KM и LN этого четырёхугольника равны 7 и 6 соответственно и пересекаются под углом $67{,}5°$?

В-5 В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен 3. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен 1.

.

В-6 В прямоугольнике $PQRS$ точка T лежит на стороне QR таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $PTRS$, равен 3. Найдите площадь прямоугольника $PQRS$, если радиус окружности, вписанной в треугольник PQT, равен 2.

В-7 В прямоугольнике $KLMN$ точка A лежит на стороне LM таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KAMN$, равен 4. Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если радиус окружности, вписанной в треугольник KLA, равен 2.

.

В-8 В прямоугольнике $EFGH$ точка K лежит на стороне FG таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $EKGH$, равен 4. Найдите площадь прямоугольника $EFGH$, если радиус окружности, вписанной в треугольник EFK, равен 3.

.

Задача 5.

В-1

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как $5 : 9$, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как $2 : 1$. Найдите косинус меньшего из углов.

В-2

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как $5 : 8$, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как $2 : 1$. Найдите косинус меньшего из углов.

В-3

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как $2 : 3$, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как $2 : 1$. Найдите косинус меньшего из углов.

В-4

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как $4 : 7$, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как $2 : 1$. Найдите косинус меньшего из углов.

В-5 Три попарно касающиеся сферы касаются также плоскости треугольника со сторонами 5, 6, 7 в вершинах этого треугольника. Найдите произведение радиусов этих трёх сфер.

В-6 Три попарно касающиеся сферы касаются также плоскости треугольника со сторонами 7, 8, 9 в вершинах этого треугольника. Найдите произведение радиусов этих трёх сфер.

В-7 Три попарно касающиеся сферы радиусов 3, 5 и 6 касаются также плоскости треугольника в вершинах этого треугольника. Найдите произведение сторон этого треугольника.

В-8 Три попарно касающиеся сферы радиусов 2, 4 и 7 касаются также плоскости треугольника в вершинах этого треугольника. Найдите произведение сторон этого треугольника.

Задача 6.

В-1

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-6x+21}+\cos 2\pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

В-2

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{x}{x^2+16}+\frac{1}{x^2-8x+17}+\cos \pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

В-3

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{x}{x^2+25}+\frac{1}{x^2-10x+32}+\cos 2\pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

В-4

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{x}{x^2+36}+\frac{1}{x^2-12x+37}+\cos \pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Задача 7.

B-1

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = 8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

B-2

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = 16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

B-3

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = -8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

B-4

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = -16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Задача 8.

В-1

Внутри выпуклого n-угольника расположено 100 точек так, что никакие три из этих $n+100$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+100$ точек. При каком максиальном значении n не может получиться более 300 треугольников?

В-2

Внутри выпуклого 200-угольника расположено n точек так, что никакие три из этих $n+200$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+200$ точек. При каком максиальном значении n не может получиться более 400 треугольников?

В-3

Внутри выпуклого n-угольника расположено 200 точек так, что никакие три из этих $n+200$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+200$ точек. При каких значениях n не может получиться более 600 треугольников?

В-4

Внутри выпуклого 100-угольника расположено n точек так, что никакие три из этих $n+100$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+100$ точек. При каких значениях n не может получиться более 500 треугольников?

Задача 9.

B-1

Дан многочлен $P(x)$ степени 10 со старшим коэффициентом 1. График $y = P(x)$ целиком лежит выше оси Ox. Многочлен $-P(x)$ разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимают значение -3. Найдите $P(2020)$.

B-2

Дан многочлен $P(x)$ степени 12 со старшим коэффициентом 1. График $y = P(x)$ целиком лежит выше оси Ox. Многочлен $P(x)$ разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимают значение -3. Найдите $P(2020)$.

B-3

Дан многочлен $P(x)$ степени 20 со старшим коэффициентом 1. График $y = P(x)$ целиком лежит выше оси Ox. Данный многочлен разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимют значение 2. Найти $P(2020)$.

B-4

Дан многочлен $P(x)$ степени 18 со старшим коэффициентом -1. График $y = P(x)$ целиком лежит ниже оси Ox. Многочлен $P(x)$ разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимют значение -2. Найти $P(2020)$.

B-5

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 210x + 11000}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 420x^{2020}}} > 1.$$

.

B-6

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 171x + 7290}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 215x^{2020}}} > 1.$$

B-7

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 251x + 15730}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 374x^{2020}}} > 1.$$

.

B-8

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 294x + 21600}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 517x^{2020}}} > 1.$$

B-9

. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 210x + 11000}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 425x^{2020}}} > 1.$$

.

B-10

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 171x + 2290}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 219x^{2020}}} > 1.$$

B-11

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 251x + 15730}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 379x^{2020}}} > 1.$$

.

B-12

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 294x + 21600}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 519x^{2020}}} > 1.$$

.

Задача 10.

В-1

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 23$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x - 1| + |y - 1| = 5$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.

В-2

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 14$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x - 1| + |y - 1| = 4$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.

В-3

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 7$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x - 1| + |y - 1| = 3$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.

В-4

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2 + y^2 = 2x - 2y + 34$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x - 1| + |y + 1| = 6$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.
