Задача 1.

В-1 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)$, если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$.

В-2 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(11)$, если $f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$.

В-3 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(12)$, если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+7$.

В-4 Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(14)$, если $f(n)=4n^3+6n^2+4n+5$.

В-5 Пусть $f(x)=x^2+10x+20$. Решите уравнение

$$f\Bigg(f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)\Bigg)=0.$$

В-6 Пусть $f(x)=x^2+6x+6$. Решите уравнение

$$f\Bigg(f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)\Bigg)=0.$$

В-7 Пусть $f(x)=x^2+14x+42$. Решите уравнение

$$f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)=0.$$

В-8 Пусть $f(x)=x^2+18x+72$. Решите уравнение

$$f\bigg(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\bigg)=0.$$

Задача 2.

В-1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+8|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5. \end{cases}$$

В-2 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-5|=2, \\ \sqrt{x^2-y-4}+|x-2|=1. \end{cases}$$

В-3 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+3|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1. \end{cases}$$

В-4 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-9|=4, \\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2. \end{cases}$$

В-5 Число $x=2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}}.$$

В-6 Число $x=2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+\ldots+2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}.$$

В-7 Число $x=2^2+2^1+2^0+2^{-1}+\ldots+2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}.$$

В-8 Число $x=2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\ldots+2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.$$

Задача 3.

B-1 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 0$ и $x^2 + cx + a = 1$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни меньше (-1). Найдите наименьшее значение a.

B-2 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 0$ и $x^2 + cx + a = -1$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни больше 1. Найдите наименьшее значение a.

B-3 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 1$ и $x^2 + cx + a = 0$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни меньше (-1). Найдите наименьшее значение a.

B-4 Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = -1$ и $x^2 + cx + a = 0$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни больше 1. Найдите наименьшее значение a.

B-5 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 11$, $P(1) = 21$?

B-6 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 8$, $P(1) = 22$?

B-7 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 9$, $P(1) = 21$?

B-8 Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 10$, $P(1) = 22$?

Задача 4.

В-1 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за один час (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого часа расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

В-2 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α против часовой стрелки едет автомобиль A, по трассе β по часовой стрелке едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают удаляться от точки касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за два часа (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени в течение этих двух часов расстояние между автомобилями будет не больше диаметра каждой трассы?

В-3 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α против часовой стрелки едет автомобиль A, по трассе β по часовой стрелке едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы β, причём эта прямая касается трассы α. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за полчаса (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого получаса расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

В-4 Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы β, причём эта прямая касается трассы α. После старта автомобили начинают удаляться от точки касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за полтора часа (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этих полутора часов расстояние между автомобилями будет не больше диаметра каждой трассы?

В-5 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4022 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4022 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 32 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 55 минут, но чаще, чем каждые 64 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

В-6 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4024 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4024 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 34 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 58 минут, но чаще, чем каждые 68 минут. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

В-7 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4026 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4026 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 36 минут. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждую 61 минуту, но чаще, чем каждые 72 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

В-8 Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4028 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4028 м.Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 38 минут. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 64 минуты, но чаще, чем каждые 76 минут. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

Задача 5.

В-1 Из равнобедренного треугольника с углом α при вершине и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ$?

В-2 Равнобедренный треугольник с углом α при вершине и площадью 1 помещают в минимальный по площади круг, а его — в минимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при 60° $\alpha \leqslant 120^\circ$?

В-3 Из равнобедренного треугольника с углом α при основании и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$?

В-4 Равнобедренный треугольник с углом α при основании и площадью 1 помещают в минимальный по площади круг, а его — в минимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$?

В-5 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с диагональю длины 1, а прокантовали его 7 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

В-6 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с полупериметром 1, а прокантовали его 13 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

В-7 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с периметром, равным 1, а прокантовали его 49 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

В-8 На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат с диагональю длины 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с периметром, равным 1, а прокантовали его 25 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

Задача 6.

В-1 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани BCD равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

В-2 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани ABC равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

В-3 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь грани BCD, если площадь поверхности этой пирамиды равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

В-4 В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь грани ABC, если площадь поверхности этой пирамиды равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

В-5 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABD и ACD равна s. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

В-6 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABC и ACD равна s. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

В-7 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы и суммы плоских углов при вершинах C и D одинаковы. Найдите сумму площадей граней ABD и ACD, если площадь поверхности этой пирамиды равна s.

В-8 В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы и суммы плоских углов при вершинах C и D одинаковы. Найдите сумму площадей граней ABC и BCD, если площадь поверхности этой пирамиды равна s.

Задача 7.

B-1 Докажите, что число $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{3}+m\sqrt{5}+k\sqrt{7}+l\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1-10^{-500}<\sqrt{35}\frac{l}{}<1$.

B-2 Докажите, что число $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{3}+m\sqrt{5}+k\sqrt{7}+l\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1<\sqrt{\frac{7}{5}\frac{k}{m}}<1+10^{-500}$.

B-3 Докажите, что число $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1-10^{-500}<\sqrt{77}\frac{l}{n}<1$.

B-4 Докажите, что число $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{5}+m\sqrt{7}+k\sqrt{11}+l\sqrt{5\cdot 7\cdot 11},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1<\sqrt{\frac{11}{7}\frac{k}{m}}<1+10^{-500}$.

B-5 На столе лежат 2021 красных и 2022 зелёных камня. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

B-6 На столе лежат 2022 красных и 2026 зелёных камней. Маша и Вася делают ходы по очереди. Маша ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

B-7 На столе лежат 2022 красных и 2024 зелёных камня. Таня и Коля делают ходы по очереди. Таня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

B-8 На столе лежат 2021 красных и 2023 зелёных камня. Катя и Вова делают ходы по очереди. Катя ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?
