Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2020/21 учебного года для 9 класса

Задача 1.

В-1

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $2x-3$, $\frac{18}{x}+1$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{52}{25}=2{,}08$

Решение. Из условия $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$ получаем $a_1a_3=a_2^2$ или $\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{18}{x}+1\right)=(2x-3)^2$. Отсюда $8x^2-25x=0$. При $x=0$ нарушается ОДЗ, а при $x=\frac{25}{8}$ получаем $a_1=\frac{25}{16}$, $a_2=\frac{13}{4}$ и $\frac{a_2}{a_1}=\frac{52}{25}$.

В-2

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $3x-2$, $\frac{8}{x}+1$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,12

В-3

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $2x-5$, $\frac{50}{x}+3$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{92}{43}\approx 2{,}14$

В-4

Во сколько раз второе из чисел $\frac{x}{2}$, $3x-5$, $\frac{50}{x}+3$ больше первого, если известно, что оно во столько же раз меньше третьего? Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{22}{7}\approx 3{,}14$

Задача 2.

В-1

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 32 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 24 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 28,8

Решение. Пусть x — скорость черепахи, а y — скорость 1-го львенка. Тогда скорость 2-го львенка равна $1{,}5y$. Весь путь до водопоя для 1-го львенка составил $6y$, а для черепахи — $32x$. Значит, сначала расстояние между ними было $6y-32x$, а первое происшествие произошло после начала движения через $(6y-32x)/(y-x)$ минут. Второе происшествие произошло после начала движения через $32x/(x+1{,}5y)$ минут. Поэтому

$$\frac{32x}{x+1{,}5y}-\frac{6y-32x}{y-x}=2{,}4 \text{ откуда } 2{,}4x^2+75{,}2xy-12{,}6y^2=0,$$

или $63\,(y/x)^2-376\,(y/x)-12=0$. Это квадратное уравнение относительно y/x имеет корни разных знаков. Положительный равен 6. Таким образом, $y=6x$ и время черепахи до водопоя после 2-го происшествия равно

$$32-\frac{32x}{x+1{,}5y}=32-\frac{32x}{x+9x}=32-3{,}2=28{,}8 \text{ мин.}$$

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 3 минуты и 54 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 29,7

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 42 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 30,8

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 36 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 34 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 33,6

Задача 3.

В-1

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{13}$.

Ответ: 12

Решение. Пусть $AB = c$, $BE = AD = 2a$. Так как треугольник ABD равнобедренный (биссектриса перпендикулярна основанию, $AB = BD = c$, $BC = 2c$), то по формуле для длины биссектрис (где $\angle ABC = \beta$) $2a = \frac{4c^2}{3c}\cos\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{2} = c\cos\frac{\beta}{2}$. Рассмотрим треугольник ABF (где F — середина отрезка AD и точка пересечения биссектрисы и медианы). Имеем $a = c\sin\frac{\beta}{2}$, $c = \frac{a}{\sin\frac{\beta}{2}}$. Значит, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2}{3}$ и $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$. Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = c^2\sin\beta = \frac{12}{13}c^2$.

В-2

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{26}$.

Ответ: 24

В-3

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $BE = AD = 4$.

Ответ: 12

В-4

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $BE = AD = 6$.

Ответ: 27

Задача 4.

В-1

Маша плотно уложила 165 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 45

Решение. Решим задачу в общем виде для $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ шаров. В основании треугольной пирамиды высотой в n рядов лежит n-ое треугольное число шаров $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Тогда всего шаров в пирамиде $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Можно решать задачу перебором.

В-2

Маша плотно уложила 220 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 55

В-3

Маша плотно уложила 286 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 66

В-4

Маша плотно уложила 364 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 78

Задача 5.

В-1

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+\frac{53}{18}y-\frac{143}{9}z}{z}=\dfrac{\frac{3}{8}x-\frac{17}{4}y+z}{y}=1$. Найдите $\dfrac{y}{z}$.

Ответ: $\dfrac{352}{305}\approx 1,15$

Решение. Решим задачу в общем виде: найти $\dfrac{y}{z}$, если числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+Ay-Bz}{z}=\dfrac{Cx-Dy+z}{y}=1$. Воспользуемся тем фактом, что если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$, то $\dfrac{a+nc}{b+nd}=k$ для любого n, при котором знаменатель не обращается в ноль. Тогда

$$1=\frac{Cx-Dy+z-Cx-CAy+CBz}{y-Cz}=\frac{-(D+CA)y+(CB+1)z}{y-Cz}=\frac{-(D+CA)\frac{y}{z}+(CB+1)}{\frac{y}{z}-C};$$

$$\frac{y}{z}-C=-(D+CA)\frac{y}{z}+(CB+1);\quad \frac{y}{z}=\frac{C+CB+1}{D+CA+1}.$$

В-2

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{x+\frac{53}{18}y-\frac{157}{9}z}{z}=\dfrac{\frac{3}{8}x-\frac{17}{4}y+z}{y}=1$. Найдите $\dfrac{y}{z}$. Ответ округлите до сотых.

Ответ: $\dfrac{76}{61}\approx 1{,}25$

В-3

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{y+\frac{53}{18}z-\frac{121}{2}x}{x}=\dfrac{\frac{3}{8}y-\frac{4}{3}z+x}{z}=1$. Найдите $\dfrac{z}{x}$.

Ответ: 7

В-4

Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{z+\frac{53}{18}x-\frac{55}{2}y}{y}=\dfrac{\frac{3}{8}z-\frac{4}{3}x+y}{x}=1$. Найдите $\dfrac{x}{y}$.

Ответ: 3,4

Задача 6.

В-1

Найдите наименьшее значение выражения $4x+9y+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{y-5}$ при условии, что $x>4$ и $y>5$.

Ответ: 71

Решение. $4x+9y+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{y-5}=4x-16+\dfrac{4}{4x-16}+9y-45+\dfrac{9}{9y-45}+61\geq 2\sqrt{4}+2\sqrt{9}+61=71$ (неравенство о средних). Равенство достигается при $4x-16=2,\ 9y-45=3$, то есть при $x=\dfrac{9}{2},\ y=\dfrac{16}{3}$.

В-2

Найдите наименьшее значение выражения $9x+4y+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{y-4}$ при условии, что $x>3$ и $y>4$.

Ответ: 53

В-3

Найдите наименьшее значение выражения $4x+9y+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}$ при условии, что $x>1$ и $y>2$.

Ответ: 32

В-4

Найдите наименьшее значение выражения $9x+4y+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{y-6}$ при условии, что $x>5$ и $y>6$.

Ответ: 79

Задача 7.

В-1

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = 8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 506,25

Решение. Если x_1 и x_2 корни этого уравнения, то $x_1 + x_2 = -2a$, $x_1x_2 = -8a$. Поэтому $x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) = 0$, то есть $(x_1 - 4)(x_2 - 4) = 16$. Пусть, для определённости, $x_1 \leqslant x_2$. Тогда возможны следующие варианты (см. таблицу)

$$\begin{array}{ccrrrrrr}
(x_1-4) & = & -16 & -8 & -4 & 1 & 2 & 4 \\
(x_2-4) & = & -1 & -2 & -4 & 16 & 8 & 4 \\
x_1 & = & -12 & -4 & 0 & 5 & 6 & 8 \\
x_2 & = & 3 & 2 & 0 & 20 & 12 & 8 \\
a & = & 4.5 & 1 & 0 & -12.5 & -9 & -8
\end{array}$$

Исключаем варианты $a = 0$ и $a = -8$, потому что при них корни одинаковы. Остаются значения $a = 4.5, a = 1, a = -9, a = -12.5$.

В-2

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = 16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 31,64

В-3

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = -8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 506,25

В-4

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = -16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 31,64

Задача 8.

В-... *(конкретные варианты ниже)*

В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен a. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен b.

Ответ: $\dfrac{4a^3-2a^2b}{a-b}$

Решение. Ясно, что $|AB|=|CD|=2a$. Применяя свойство четырехугольника, описанного около окружности и формулу длины радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, имеем $|MC|+|AD|2a+|AM|, 2b=2a+|BM|-|AM|$, откуда имеем $|MC|+|AD|+2b=4a+|BM|$, а так как $|AD|=|BM|+|MC|$, то $|MC|=2a-b=|AF|$, (где F — точка касания стороны AB и вписанной в ABM окружности.) Значит, $2a-b+|AD|=2a+|AM|, |AM|=|AD|-b$. Кроме того, $|BM|=|BC|-|MC|=|AD|-2a+b$. По теореме Пифагора для треугольника ABM имеем $4a^2+(|AD|-2a+b)^2=(|AD|-b)^2 \Leftrightarrow 8a^2-4ab-(4a-2b)\cdot|AD|=-2b\cdot|AD| \Leftrightarrow |AD|=\dfrac{4a^3-2a^2b}{a-b}$.

В-1

В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен 5. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен 3.

Ответ: 175

В-2

В прямоугольнике $CDEF$ точка K лежит на стороне CD таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KDEF$, равен 7. Найдите площадь прямоугольника $CDEF$, если радиус окружности, вписанной в треугольник CKF, равен 3.

Ответ: 269,5

В-3

В прямоугольнике $KLMN$ точка P лежит на стороне MN таким образом, что радиус окружности, вписанной в треугольник KPN, равен 6. Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KLMP$, равен 10.

Ответ: 700

В-4

В прямоугольнике $EFGH$ точка T лежит на стороне EH таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $FGHT$, равен 9. Найдите площадь прямоугольника $EFGH$, если радиус окружности, вписанной в треугольник EFT, равен 5.

Ответ: 526,5

Задача 9.

В-1

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(111) + A(112) + \ldots + A(218) + A(219)$.

Ответ: 12045

Решение. Наибольшие нечётные делители никаких двух из данных чисел не могут совпасть, так как числа с одинаковыми наибольшими нечётными делителями либо равны, либо отличаются минимум в 2 раза. Значит, наибольшие нечётные делители чисел $111, 112, \ldots, 218, 219$ отличаются друг от друга. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел от $n+1$ до $2n$ есть n различных нечётных чисел, которые не превышают $2n$. Следовательно, это числа $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Если к набору чисел добавить число 220, то искомая сумма будет равна $1 + 3 + 5 + \ldots + 219 - A(220) = \frac{1+219}{2} \cdot 110 - 55 = 110^2 - 55 = 12045$.

В-2

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(113) + A(114) + \ldots + A(222) + A(223)$.

Ответ: 12537

В-3

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(115) + A(116) + \ldots + A(226) + A(227)$.

Ответ: 12939

В-4

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(117) + A(118) + \ldots + A(230) + A(231)$.

Ответ: 13427
