Задача 1.

В-1

Найдите x:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}}=\frac{16}{37}$$

Ответ: $-0{,}25$

Решение. $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}}=\frac{16}{37} \Leftrightarrow 2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}=\frac{37}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}}=\frac{5}{16} \Leftrightarrow 3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5+\frac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$.

В-2

Найдите x:

$$\frac{1}{6+\frac{1}{7+\frac{1}{8+\frac{1}{9+\frac{1}{x}}}}}=\frac{64}{393}$$

Ответ: $-0{,}125$

В-3

Найдите x:

$$\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}}}=\frac{17}{89}$$

Ответ: $-0{,}5$

В-4

Найдите x:

$$\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{7+\frac{1}{x}}}}}=\frac{67}{281}$$

Ответ: $-0{,}2$

Задача 2.

В-1

В школьном тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 30

Решение. По условию $\frac{60}{100} < \frac{20}{x} < \frac{70}{100}$, то есть $\frac{200}{7} < x < \frac{100}{3}$, значит, $29 \leqslant x \leqslant 33$. Так как число вопросов должно делиться на 5, то $x = 30$.

В-2

В школьном тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 32

В-3

В школьном тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 50, но меньше 60. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 35

В-4

В школьном тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Антон правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 50, но меньше 60. Сколько всего вопросов было в тесте?

Ответ: 36

Задача 3.

В-1

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 32 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 28 минут 48 секунд после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 2,4

Решение. Примем весь путь черепахи за 1, и пусть x — скорость 1-го львенка. Тогда скорость 2-го львенка равна $1{,}5x$, а скорость черепахи — $1/32$. Весь путь до водопоя для 1-го львенка составил $6x$. Значит, сначала расстояние между ним и черепахой было $6x-1$, а первое происшествие произошло после начала движения через $(6x-1)/(x-\frac{1}{32})$ мин. Второе происшествие произошло после начала движения через

$$32-28{,}8=\frac{1}{1{,}5x+\frac{1}{32}} \text{ мин., откуда } x=\frac{3}{16}.$$

Поэтому количество минут между происшествиями равно

$$32-28{,}8-\frac{6x-1}{x-\frac{1}{32}}=3{,}2-\frac{\frac{18}{16}-1}{\frac{6}{32}-\frac{1}{32}}=3{,}2-0{,}8=2{,}4.$$

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 27 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 24 минуты 18 секунд после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 2,1

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 30 минут 48 секунд после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 0,7

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 39 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через какое-то время — второй. Через 36 минут 24 секунды после второго происшествия черепаха дошла до водопоя. Сколько минут прошло между двумя происшествиями, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 2,1

Задача 4.

В-1

Дан квадрат со стороной 5 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 49 см^2?

Ответ: 6

Решение. Квадрат, вписанный в данный квадрат, имеет наименьшую площадь, если его вершины являются серединами сторон исходного квадрата (это следует, например, из того, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали). В этом случае площадь вписанного квадрата равна половине площади исходного. Значит, площади квадратов минимальной площади образуют геометрическую прогрессию с первым членом 5 и знаменателем 0,5. Сумма первых её n членов впервые превысит 49 при $n = 6$ (это можно получить перебором либо из формулы для суммы членов геометрической прогрессии).

В-2

Дан квадрат со стороной 7 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 97 см^2?

Ответ: 7

В-3

Дан квадрат со стороной 3 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 17 см^2?

Ответ: 5

В-4

Дан квадрат со стороной 9 см. На четырёх его сторонах расположены вершины второго квадрата; на четырёх сторонах второго квадрата — вершины третьего, и т. д. При каком наименьшем натуральном n сумма площадей первых n квадратов гарантированно будет больше, чем 160 см^2?

Ответ: 7

Задача 5.

В-1

За круглым столом сидят 1001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 502

Решение. Из условия следует, что рыцарь не может сидеть между двумя рыцарями или двумя лжецами, а лжец не может сидеть между двумя лжецами. Таким образом, при обходе вокруг стола рыцари будут встречаться нам по двое подряд, а лжецы — по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому лжецу можно найти в пару по рыцарю (и после этого ещё останутся рыцари, не вошедшие ни в одну пару). Значит, рыцарей за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 502.

Пример рассадки 502 рыцарей и 499 лжецов, удовлетворяющий условию: сначала посадим 248 групп вида «рыцарь, рыцарь, лжец, лжец», затем — ещё три группы вида «рыцарь, рыцарь, лжец».

В-2

За круглым столом сидят 2001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 999

В-3

За круглым столом сидят 3001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей может сидеть за столом?

Ответ: 1502

В-4

За круглым столом сидят 4001 человек, каждый из которых — рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Оказалось, что рядом с каждым рыцарем сидит ровно один лжец, а рядом с каждым лжецом найдётся рыцарь. Какое наибольшее количество лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 1999

Задача 6.

В-1

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2018$ делится на 2020, а число $n + 2020$ делится на 2018.

Ответ: 2034142

Решение. По условию $n + 2018 = 2020m$, $n + 2020 = 2018k$, откуда $1009k - 1010m = 1$. Решение этого диофантова уравнения: $k = -1 + 1010p$, $m = -1 + 1009p$. Поэтому $n + 2018 = 2020(-1 + 1009p) = -2020 + 2020 \cdot 1009p$, откуда $n = -2018 - 2020 + 2020 \cdot 1009p$. Наименьшее натуральное n равно $n = 2020 \cdot 1009 - 2020 - 2018 = 2034142$.

В-2

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2019$ делится на 2020, а число $n + 2020$ делится на 2019.

Ответ: 4074341

В-3

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2019$ делится на 2021, а число $n + 2021$ делится на 2019.

Ответ: 4076359

В-4

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число $n + 2020$ делится на 2022, а число $n + 2022$ делится на 2020.

Ответ: 2038178

Задача 7.

В-1

Внутри выпуклого 13-угольника расположено 200 точек так, что никакие 3 из этих 213 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершины каждого — какие-нибудь три точки из данных 213 точек. Какое наибольшее число треугольников могло получится?

Ответ: 411

Решение. Если каждая из точек будет вершиной какого-нибудь треугольника, то общая сумма углов будет равна $180^\circ \cdot (13-2) + 360^\circ \cdot 200 = 180^\circ \cdot (11+400) = 180^\circ \cdot 411$. Значит, получается 411 треугольников. Если некоторые точки в разрезании не участвуют, то и число треугольников будет меньше.

В-2

Внутри выпуклого 100-угольника расположено 17 точек так, что никакие три из этих 117 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных 117 точек. Какое наибольшее количество треугольников может при этом получиться?

Ответ: 132

В-3

Внутри выпуклого 200-угольника расположено 13 точек так, что никакие три из этих 213 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных 213 точек. Какое наибольшее количество треугольников может при этом получиться?

Ответ: 224

В-4

Внутри выпуклого 17-угольника расположено 100 точек так, что никакие три из этих 117 точек (включая вершины многоугольника) не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных 117 точек. Какое наибольшее количество треугольников может при этом получиться?

Ответ: 215

Задача 8.

В-1

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(111) + A(112) + \ldots + A(218) + A(219)$.

Ответ: 12045

Решение. Наибольшие нечётные делители никаких двух из данных чисел не могут совпасть, так как числа с одинаковыми наибольшими нечётными делителями либо равны, либо отличаются минимум в 2 раза. Значит, наибольшие нечётные делители чисел $111, 112, \ldots, 218, 219$ отличаются друг от друга. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел от $n+1$ до $2n$ есть n различных нечётных чисел, которые не превышают $2n$. Следовательно, это числа $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Если к набору чисел добавить число 220, то искомая сумма будет равна $1 + 3 + 5 + \ldots + 219 - A(220) = \frac{1+219}{2} \cdot 110 - 55 = 110^2 - 55 = 12045$.

В-2

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(113) + A(114) + \ldots + A(222) + A(223)$.

Ответ: 12537

В-3

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(115) + A(116) + \ldots + A(226) + A(227)$.

Ответ: 12939

В-4

Обозначим через $A(n)$ наибольший нечётный делитель числа n. Например, $A(21) = 21$, $A(72) = 9$, $A(64) = 1$. Найдите сумму $A(117) + A(118) + \ldots + A(230) + A(231)$.

Ответ: 13427
