

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2020/21 учебного года для 7-8 классов

Задача 1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т.д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Решение. Пусть V_1 — скорость первого автомобиля, V_0 — начальная скорость второго, а преодоленное каждым автомобилем расстояние равно S . Тогда $V_0 = 3V_1$. Первый автомобиль затратил на весь путь время $t_1 = \frac{S}{V_1}$, а второй — время

$$t_2 = \frac{S}{V_0} + \frac{S}{\frac{V_0}{2}} + \dots + \frac{S}{\frac{V_0}{2^7}} + \frac{S}{\frac{V_0}{2^8}} = \frac{S}{2V_0} \cdot 8 + \frac{S}{V_0} = \frac{S}{6V_1} \cdot 8 + \frac{S}{3V_1} = \frac{5S}{3V_1},$$

откуда $\frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{3}$.

Задача 2. Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

Ответ: 81.

Решение. Пусть задуманное число равно $\overline{mn} = 10m + n$. Тогда $4\overline{nm} = \overline{nm}^2$. Значит, \overline{nm}^2 делится на 4, а \overline{nm} — на 2, поэтому цифры m чётна (и отлична от нуля). Кроме того, $\overline{nm} = \overline{nm}^2 : 4 = (\overline{nm} : 2)^2$, то есть \overline{nm} — квадрат натурального числа, начинающийся с чётной цифры. Значит, \overline{nm} может равняться 25, 49, 64 или 81. Проверка показывает, что из этих четырёх вариантов условию удовлетворяет только последний.

Задача 3. Назовем составное натуральное число n «интересным», если все его натуральные делители можно выписать в порядке возрастания, и при этом каждый следующий делитель делится на предыдущий. Найти все «интересные» натуральные числа от 20 до 90 (включительно).

Ответ: 25, 27, 32, 49, 64, 81.

Решение. «Интересными» могут быть только числа вида $n = p^k$, $k = 2, 3, 4, \dots$, где p — простое число.

Действительно, если рассмотреть число $n = a \cdot p^k$, $\text{НОД}(a, p) = 1$, то в ряду делителей $1, p, \dots, p^k$ делитель a стоять не может. Ситуация $\dots p^k < a < ap \dots$ также невозможна, так как p^k не делит a . Значит, для получения ответа нужно выписать все степени простых чисел в диапазоне от 20 до 90.

Задача 4. Решите уравнение:

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 + (x+5)^2 + \dots + (x+2021)^2 = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \dots + (x-2020)^2.$$

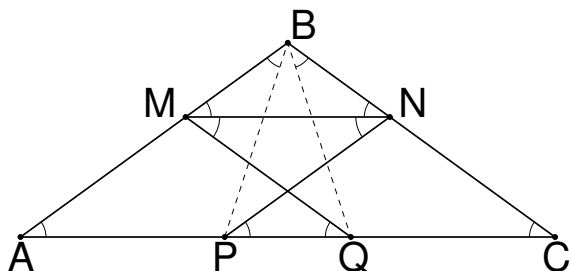
Ответ: $-0,5$.

Решение. Левая и правая части уравнения равны соответственно $1011x^2 + 2(1+3+5+\dots+2021)x + (1^2+3^2+5^2+\dots+2021^2)$ и $1011x^2 - 2(2+4+6+\dots+2020)x + 2^2+4^2+6^2+\dots+2020^2$. Уравнение приводится к виду $2(1+2+3+4+\dots+2021)x = -1^2+2^2-3^2+4^2+\dots-2019^2+2020^2-2021^2$, откуда $(1+2021) \cdot 2021x = -\frac{3+4039}{2} \cdot 1010 - 2021^2$ и $x = \frac{1010-2021}{2022} = -\frac{1}{2}$.

Задача 5. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены такие точки M и N , что $AM = MN = NC$. На стороне AC выбраны такие точки P и Q , что $MQ \parallel BC$, $NP \parallel AB$. Известно, что $PQ = BM$. Найдите угол MQB .

Ответ: 36° . Ответ также может быть дан в форме $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ и пр.

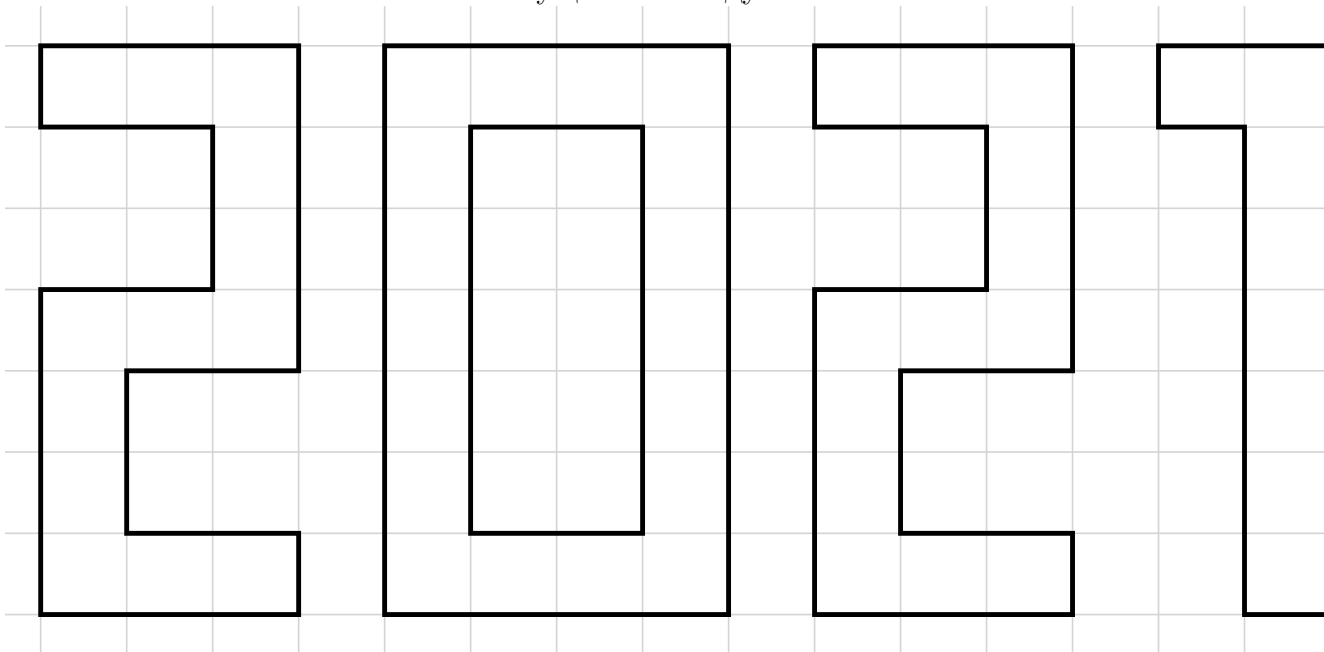
Решение. Пусть $\angle A = \angle C = \alpha$, тогда по свойству параллельных прямых $\angle NPC = \angle AQM = \alpha$. Нетрудно доказать, что $MN \parallel AC$ (через подобие треугольников, или через равенство расстояний от точек M, N до прямой AC , или через подсчёт углов), поэтому $\angle BMN = \angle QMN = \angle BNM = \angle MNP = \alpha$ и $AMNP$ — ромб, откуда $AP = AM = MN$. (Семиклассники могут доказать это равенство через равенство $\triangle AMN = \triangle APN$.)



Первый случай. Пусть точка P лежит на отрезке AQ . Тогда, с учётом вышесказанного, $\triangle AMQ = \triangle APB$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle ABP = \angle AQM = \alpha$; аналогично, $\angle QBC = \angle CPN = \alpha$. $\angle BPQ = 2\alpha$ как внешний для $\triangle APB$, значит, $\angle BPN = 2\alpha - \alpha = \alpha$; аналогично, $\angle MQB = \alpha$. Так как $\triangle ABQ$ равнобедренный, $\angle ABQ = \angle AQB = 2\alpha$, откуда $\angle PBQ = \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника для $\triangle ABC$ получаем $5\alpha = 180^\circ$, откуда $\angle MQB = \alpha = 36^\circ$.

Второй случай. Пусть точка P лежит на отрезке CQ . Тогда $MN = AP > PQ = BM$. В $\triangle BMN$ против большего угла лежит большая сторона, значит, $\angle MBN = 180^\circ - 2\alpha > \angle BNM = \alpha$, откуда $\alpha < 60^\circ$. Но и в $\triangle AMQ$ против большего угла лежит большая сторона, а поскольку $AM > AQ = AP - QP = AM - QP$, это означает, что $\angle A = \alpha > \angle AMQ = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\alpha > 60^\circ$. Полученное противоречие показывает, что второй случай невозможен.

Задача 6. Наташа хочет выложить мозаикой число 2021, показанное на рисунке. У неё есть 4 одинаковые плитки размером 1×1 клетку и 24 одинаковые плитки размером 1×2 клетки. Сколькими способами Наташа может осуществить задуманное?



Ответ: 6517.

Решение. Двойка состоит из 13 клеток, ноль — из 18, единица — из 8. Поэтому каждая двойка должна содержать нечётное число плиток 1×1 (одну или три), а ноль и единица — чётное (ноль или две). Значит, в каждой двойке есть хотя бы по одной плитке 1×1 , а ещё две такие плитки могут оказаться в составе одной любой цифры.

Если двойка содержит одну плитку 1×1 , то её можно располагать только в 7 из клеток двойки, чтобы остальные клетки можно было заполнить плитками 1×2 . Если же двойка содержит три плитки 1×1 , то плиток 1×2 будет 5. Число способов их уложить равно числу способов переставить буквы в слове АААБББББ (буквы А соответствуют плиткам 1×1 , а буквы Б — плиткам 1×2). Это число способов равно $8! : (3! \cdot 5!) = 7 \cdot 8 = 56$.

Если ноль не содержит плиток 1×1 , то уложить его 9 плитками 1×2 есть два способа (в зависимости от того, одна или две горизонтальные плитки в верхней горизонтали нуля). Если же ноль содержит две плитки 1×1 , то есть 18 способов поставить первую из них, и для каждого из этих способов есть по 9 способов поставить вторую («отступив» чётное число клеток от первой по часовой стрелке); итого $18 \cdot 9 : 2 = 81$ способ (пополам делим, поскольку плитки неразличимы).

Если единица не содержит плиток 1×1 , то уложить её 4 плитками 1×2 можно единственным способом. Если же единица содержит две плитки 1×1 и три плитки 1×2 , то число способов их уложить равно числу способов переставить буквы в слове ААБББ, которое равно $5! : (2! \cdot 3!) = 10$.

Если три плитки 1×1 в первой двойке и одна — во второй, то есть 56 способов заполнить первую двойку, 7 способов заполнить вторую двойку, два способа заполнить ноль и один способ заполнить единицу. Итого $56 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 = 784$ способа. Ещё столько же способов, когда одна плитка 1×1 в первой двойке и три — во второй.

Если в двойках по одной плитке 1×1 и ещё две такие плитки в нуле: есть по 7 способов выложить каждую двойку, 81 способ выложить ноль и один способ выложить единицу; итого $7^2 \cdot 81 \cdot 1 = 3969$ способов.

Если в двойках по одной плитке 1×1 и ещё две такие плитки в единице: есть по 7 способов выложить каждую двойку, два способа выложить ноль и 10 способов выложить единицу; итого $7^2 \cdot 2 \cdot 10 = 980$ способов.

Всего получаем $2 \cdot 784 + 3969 + 980 = 6517$ способов выложить мозаику.