

## Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2020/21 учебного года для 5-6 классов

---

**Задача 1.** Всякий раз, когда мой брат говорит правду, наша бабушка чихает. Однажды брат сказал, что он получил по математике «5», но бабушка не чихнула. Тогда он, слегка засомневавшись в своих первых словах, сказал, что получил «4», и бабушка чихнула. Приободрившись от бабушкиного чихания, он подтвердил, что уж точно получил не менее 3, но бабушка больше не чихала. Так какую же всё-таки оценку получил брат по математике?

**Ответ:** «2».

**Решение.** Если бабушка не чихнула, то брат точно соврал, следовательно, он получил не «5» и даже более того, менее 3. Если же бабушка чихнула, то не факт, что он при этом сказал правду, так как условие не запрещает бабушке чихать, когда брат врёт.

---

**Задача 2.** Баба-Яга должна прибыть на Лысую Гору ровно в полночь. Она рассчитала, что если полетит на ступе со скоростью 50 км/ч, то опоздает на 2 часа, а если на электровенике со скоростью 150 км/ч, то прилетит на 2 часа раньше. А чтобы прибыть на Лысую Гору точно в срок, Баба-Яга воспользовалась метлой. В котором часу Баба-Яга вылетела и с какой скоростью летела на метле?

**Ответ:** В 20:00 со скоростью 75 км/ч.

**Решение.** На электровенике лететь втрое быстрее, чем в ступе, и при этом экономится 4 часа времени. Значит, две трети времени полёта в ступе составляют 4 часа, весь полёт в ступе занял бы 6 часов, а весь полёт на электровенике — втрое меньше, то есть 2 часа. При этом Баба-Яга вылетела бы за 6 часов до двух часов ночи, то есть в 20 часов вечера. Чтобы прилететь точно вовремя, Баба-Яге нужно провести в полёте 4 часа, то есть вдвое больше, чем на электровенике. Значит, лететь на метле нужно вдвое медленнее, чем на электровенике, то есть со скоростью 75 км/ч.

---

**Задача 3.** В одной школе учатся четверо приятелей — все в разных классах: самый младший — в первом классе, а самый старший — в четвёртом. Определите имя, фамилию и класс каждого из них, если известно, что:

- 1) Боря — не первоклассник;
- 2) когда Вася идёт в бассейн на соседнюю с его улицей улицу Южную, Иванов гуляет с собакой у себя во дворе на улице Зелёной;
- 3) Миша на год старше Димы;
- 4) Боря и Орлов — соседи и живут на улице Северной;
- 5) Крылов познакомился с Петровым ровно год назад, будучи еще первоклассником;
- 6) Вася отдал Боре учебник, по которому сам занимался в прошлом году.

**Ответ:** Дима Иванов учится в первом классе, Миша Крылов — во втором, Боря Петров — в третьем, Вася Орлов — в четвёртом.

**Решение.** Сначала соотнесём имена ребят с классами. Из условий 1, 3 и 6 следует, что только Дима может быть первоклассником. Тогда из условия 3 Миша во втором классе. Из условия 6 Вася старше Бори, значит, Вася в четвертом классе, а Боря в третьем.

Теперь соотнесём имена с фамилиями. Из условия 5 следует, что Крылов сейчас учится во втором классе, значит, это Миша. Из условий 2 и 4 следует, что Боря — не Орлов и не Иванов, значит, он Петров. Из условия 2 следует, что Вася — не Иванов, значит, он Орлов. Тогда Дима — Иванов.

---

**Задача 4.** Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

**Ответ:** 81.

**Решение.** Пусть задуманное число равно  $\overline{m\overline{p}} = 10m + n$ . Тогда  $4\overline{m\overline{p}} = \overline{p\overline{m}}^2$ . Значит,  $\overline{p\overline{m}}^2$  делится на 4, а  $\overline{p\overline{m}}$  — на 2, поэтому цифры  $m$  чётна (и отлична от нуля). Кроме того,  $\overline{m\overline{p}} = \overline{p\overline{m}}^2 : 4 = (\overline{p\overline{m}} : 2)^2$ , то есть  $\overline{m\overline{p}}$  — квадрат натурального числа, начинающийся с чётной цифры. Значит,  $\overline{m\overline{p}}$  может равняться 25, 49, 64 или 81. Проверка показывает, что из этих четырёх вариантов условию удовлетворяет только последний.

---

**Задача 5.** Марсианский светофор состоит из шести одинаковых лампочек, расположенных в двух горизонтальных рядах (один под другим) по три лампочки в каждом. Водитель марсохода в тумане может различить количество и взаимное расположение горящих лампочек светофора (например, если горят две лампочки, — находятся ли они в одном горизонтальном ряду или в разных, находятся ли они в одном вертикальном ряду, или в соседних вертикальных рядах, или в двух крайних вертикальных рядах). Однако он не может различить негорящие лампочки и корпус светофора. Поэтому, если, например, горит всего одна лампочка, невозможно определить, какая именно из шести). Сколько сигналов марсианского светофора может отличить друг от друга в тумане водитель марсохода? Если ни одна лампочка светофора не горит, водитель его не видит.

**Ответ:** 44.

**Решение.** Если два сигнала светофора отличаются только сдвигом горящих лампочек, то водитель их не различает (и наоборот). Поэтому любой сигнал либо можно сдвигом влево и/или вверх превратить в неотличимый от него сигнал, у которого хотя бы одна лампочка горит в верхнем горизонтальном ряду и хотя бы одна — в левом вертикальном ряду, либо сигнал уже обладает этим свойством. Возможны два случая.

1. Горит верхняя левая лампочка. Тогда каждая из остальных лампочек может гореть или не гореть, и все такие сигналы будут отличимы друг от друга, поскольку получить их друг из друга сдвигом по горизонтали и/или вертикали нельзя. Значит, таких сигналов будет  $2^5 = 32$ .

2. Не горит верхняя левая лампочка. Тогда обязательно должна гореть левая нижняя лампочка и ещё одна или обе оставшиеся лампочки в верхнем ряду (3 способа), а каждая из двух остальных лампочек в нижнем ряду может гореть или не гореть ( $2^2 = 4$  способа). Итого  $3 \cdot 2^2 = 12$  сигналов.

Всего получаем  $32 + 12 = 44$  различимых сигнала.