Задача 1.

В-1

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $2x-3$, $\dfrac{18}{x}+1$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: $\dfrac{52}{25}=2{,}08$

Решение. По характеристическому свойству геометрической прогрессии $a_n\cdot a_{n+2}=a_{n+1}^2$. Получаем уравнение: $\dfrac{x}{2}\cdot\left(\dfrac{18}{x}+1\right)=(2x-3)^2$. Отсюда $8x^2-25x=0$. При $x=0$ нарушается ОДЗ, а при $x=\dfrac{25}{8}$ получаем геометрическую прогрессию с первым членом $a=\dfrac{25}{16}$ и знаменателем $q=\dfrac{52}{25}$.

В-2

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $3x-2$, $\dfrac{8}{x}+1$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,12

В-3

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $2x-5$, $\dfrac{50}{x}+3$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: $\dfrac{92}{43}\approx 2{,}14$

В-4

Известно, что числа $\dfrac{x}{2}$, $3x-5$, $\dfrac{50}{x}+3$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: $\dfrac{22}{7}\approx 3{,}14$

В-5 Число A, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 14,6, а в десятичной системе счисления равно 16,5. Число B в системе счисления с основанием n равно 19,3. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

Ответ: 21,25

Решение. Уравнение $14.6_n=16.5_{10}$ равносильно уравнению $n+4+\frac{6}{n}=16.5\Leftrightarrow 2n^2-25n+12=0$, имеющему корни 12 и $0,5$. Значит, $n=12$, поэтому $B=19,3_{12}=1\cdot 12+9\cdot 1+\frac{3}{12}=21.25$.

В-6 Число A, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 15,4, а в десятичной системе счисления равно 21,25. Число B в системе счисления с основанием n равно 27,8. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

Ответ: 39,5

В-7 Число А, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 17,3, а в десятичной системе счисления равно 19,25. Число В в системе счисления с основанием n равно 22,6. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

Ответ: 26,5

В-8 Число А, записанное в системе счисления с натуральным основанием n, равно 14,8, а в десятичной системе счисления равно 20,5. Число В в системе счисления с основанием n равно 24,4. Чему оно равно в десятичной системе счисления?

Ответ: 36,25

Задача 2.

В-1

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 32 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 24 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 28,8

Решение. Пусть x — скорость черепахи, а y — скорость 1-го львенка. Тогда скорость 2-го львенка равна $1{,}5y$. Весь путь до водопоя для 1-го львенка составил $6y$, а для черепахи — $32x$. Значит, сначала расстояние между ними было $6y-32x$, а первое происшествие произошло после начала движения через $(6y-32x)/(y-x)$ минут. Второе происшествие произошло после начала движения через $32x/(x+1{,}5y)$ минут. Поэтому

$$\frac{32x}{x+1{,}5y} - \frac{6y-32x}{y-x} = 2{,}4 \text{ откуда } 2{,}4x^2 + 75{,}2xy - 12{,}6y^2 = 0,$$

или $63\,(y/x)^2 - 376\,(y/x) - 12 = 0$. Это квадратное уравнение относительно y/x имеет корни разных знаков. Положительный равен 6. Таким образом, $y = 6x$ и время черепахи до водопоя после 2-го происшествия равно

$$32 - \frac{32x}{x+1{,}5y} = 32 - \frac{32x}{x+9x} = 32 - 3{,}2 = 28{,}8 \text{ мин.}$$

В-2

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 1,5 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 3 минуты и 54 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 29,7

В-3

В то время, как на водопой отправился находящийся в 6 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 33 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 42 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 30,8

В-4

В то время, как на водопой отправился находящийся в 5 минутах от него один львёнок, второй, уже утолив жажду, по той же дороге направился обратно в 2 раза быстрее первого. В это же время по той же дороге на водопой отправилась черепаха, находившаяся в 36 минутах от него. Через какое-то время на неё наступил первый львенок, а ещё через 2 минуты и 34 секунды — второй. Через сколько минут после второго происшествия черепаха дошла до водопоя, если известно, что все трое двигались с постоянными скоростями?

Ответ: 33,6

В-5

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 30 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 36 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 10 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 7,34

Решение. Приведем решение задачи в общем виде для следующего условия.

Крокодил переплыл по прямой реку шириной a м за t сек. При этом его отнесло вниз по течению на b м. Отдохнув и собравшись с силами, он с той же скоростью относительно воды, по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за T сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

В такой формулировке задачи искомое время равно $\sqrt{a^2+b^2}/v$, где v — скорость крокодила в стоячей воде. Продольная и поперечная компоненты скорости равны соответственно $u_1 = b/t$, $w_1 = a/t$ в первом случае и $u_2 = b/T$, $w_2 = a/T$ во втором. Приведенные выше продольные компоненты скорости получались в виде суммы или разности продольной компоненты собственной скорости крокодила и скорости течения. Поперечная и продольная компоненты собственной скорости крокодила могут отличаться в первом и во втором случае, но в каждом случае сумма их квадратов равна v^2. Пусть u — скорость течения. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} (u_1-u)^2 + w_1^2 = v^2, \\ (u_2+u)^2 + w_2^2 = v^2. \end{cases}$$

Вычитая эти равенства, получим уравнение, из которого найдем скорость течения:

$$u = \frac{w_1^2 - w_2^2 + u_1^2 - u_2^2}{2(u_1+u_2)} = \frac{a^2\left(\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{T^2}\right) + b^2\left(\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{T^2}\right)}{2b\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{T}\right)} = \frac{(a^2+b^2)(T-t)}{2bTt}.$$

После этого можно найти квадрат собственной скорости крокодила:

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{b}{T} + \frac{(a^2+b^2)(T-t)}{2bTt}\right)^2 + \left(\frac{a}{T}\right)^2 &= \frac{\left(2b^2t + (a^2+b^2)(T-t)\right)^2 + 4a^2b^2t^2}{(2bTt)^2} = \\ &= \frac{4a^2b^2t^2 + 4b^4t^2 + (a^2+b^2)^2(T-t)^2 + 4b^2t(a^2+b^2)(T-t)}{(2bTt)^2} = \\ &= \frac{(a^2+b^2)}{(2bTt)^2}\left(4b^2t^2 + 4b^2t(T-t) + (a^2+b^2)(T-t)^2\right), \end{aligned}$$

а затем и искомое время:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{v^2}} = \frac{2bTt}{\sqrt{4b^2t^2 + 4b^2t(T-t) + (a^2+b^2)(T-t)^2}}.$$

В-6

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 30 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 24 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 15 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 7,56

В-7

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 36 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 24 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 9 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 6,90

В-8

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 56 м за 8 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 42 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 14 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 9,57

В-9

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 42 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 28 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 14 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 7,20

В-10

Крокодил переплыл по прямой реку шириной 36 м за 6 сек. При этом его отнесло вниз по течению на 27 м. Отдохнув и собравшись с силами, он по той же прямой, но борясь с течением, вернулся в ту же точку, но уже за 12 сек. За сколько секунд он мог бы проплыть ту же дистанцию в стоячей воде? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 7,31

Задача 3.

В-1

Маша плотно уложила 165 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 45

Решение. Решим задачу в общем виде для $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ шаров. В основании треугольной пирамиды высотой в n рядов лежит n-ое треугольное число шаров $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Тогда всего шаров в пирамиде $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Можно решать задачу перебором.

В-2

Маша плотно уложила 220 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 55

В-3

Маша плотно уложила 286 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 66

В-4

Маша плотно уложила 364 одинаковых шаров в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 78

Решение. Решим задачу в общем виде в следующей формулировке. Маша плотно уложила $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: n^2.

Решение. В основании четырёхугольной пирамиды высотой в n рядов лежит n^2 шаров. Тогда всего шаров в пирамиде $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Можно решать задачу перебором.

В-5 Маша плотно уложила 506 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 121

.

В-6 Маша плотно уложила 650 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 144

.

В-7 Маша плотно уложила 819 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 169

.

В-8 Маша плотно уложила 1015 одинаковых шаров в виде правильной четырёхугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Ответ: 196

.

Задача 4.

В-1

Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равные 3 и 4 соответственно, пересекаются под углом 75°. Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника?

Ответ: 12,5

Решение. Каждый такой отрезок находится по теореме косинусов из треугольника, соединяющего три середины сторон четырехугольника. В нем две стороны равны половинкам диагоналей, а угол совпадает с углом между диагоналями или дополняет его до 180°. При этом сумма квадратов длин отрезков на самом деле не зависит от угла между диагоналями.

В-2

Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $KLMN$, если диагонали KM и LN этого четырёхугольника равны 12 и 5 соответственно и пересекаются под углом 15°?

Ответ: 84,5

В-3

Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равные 5 и 4 соответственно, пересекаются под углом 22,5°. Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника?

Ответ: 20,5

В-4

Чему равна сумма квадратов длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $KLMN$, если диагонали KM и LN этого четырёхугольника равны 7 и 6 соответственно и пересекаются под углом 67,5°?

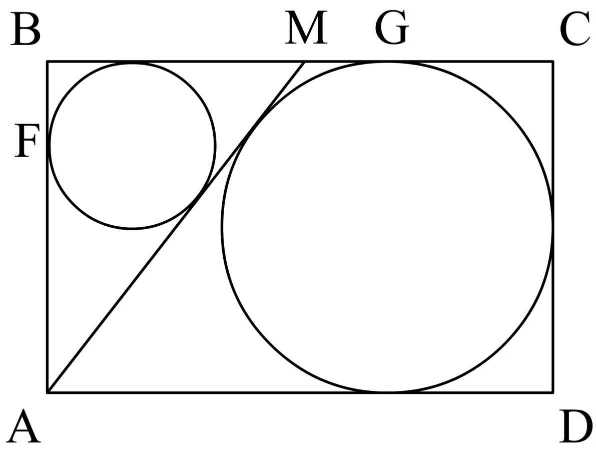
Ответ: 42,5

Решение. Решим задачу в общем виде в следующей формулировке.

В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен a. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен b.

Ясно, что $|AB| = |CD| = 2a$. Применяя свойство четырехугольника, описанного около окружности и формулу длины радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, имеем

$$|MC| + |AD| = 2a + |AM|, \quad 2b = 2a + |BM| - |AM|,$$



откуда имеем $|MC| + |AD| + 2b = 4a + |BM|$, а так как $|AD| = |BM| + |MC|$, то

$$|MC| = 2a - b = |AF|.$$

Значит, $2a - b + |AD| = 2a + |AM|$, $|AM| = |AD| - b$. Кроме того,

$$|BM| = |BC| - |MC| = |AD| - 2a + b.$$

По теореме Пифагора для треугольника ABM имеем

$$4a^2 + (|AD| - 2a + b)^2 = (|AD| - b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8a^2 - 4ab - (4a - 2b) \cdot |AD| = -2b \cdot |AD| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |AD| = \frac{2a^2 - ab}{a - b}.$$

Ответ: $\dfrac{4a^3 - 2a^2b}{a - b}$.

В-5 В прямоугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCD$, равен 3. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, равен 1.

Ответ: 45

.

В-6 В прямоугольнике $PQRS$ точка T лежит на стороне QR таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $PTRS$, равен 3. Найдите площадь прямоугольника $PQRS$, если радиус окружности, вписанной в треугольник PQT, равен 2.

Ответ: 72

.

В-7 В прямоугольнике $KLMN$ точка A лежит на стороне LM таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $KAMN$, равен 4. Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если радиус окружности, вписанной в треугольник KLA, равен 2.

Ответ: 96

.

В-8 В прямоугольнике $EFGH$ точка K лежит на стороне FG таким образом, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник $EKGH$, равен 4. Найдите площадь прямоугольника $EFGH$, если радиус окружности, вписанной в треугольник EFK, равен 3.

Ответ: 160

.

Задача 5.

В-1

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как 5 : 9, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как 2 : 1. Найдите косинус меньшего из углов.

Ответ: 0,9

Решение. Если h — расстояние между плоскостями, а α — меньший из углов, то длины отрезков равны соответственно $h/\sin 2\alpha$ и $h/\sin\alpha$. Поэтому

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{9}, \quad \text{откуда} \quad \cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{9}{10}.$$

В-2

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как 5 : 8, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как 2 : 1. Найдите косинус меньшего из углов.

Ответ: 0,8

В-3

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как 2 : 3, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как 2 : 1. Найдите косинус меньшего из углов.

Ответ: 0,75

В-4

Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как 4 : 7, а острые углы между этими прямыми и одной из плоскостей — соответственно как 2 : 1. Найдите косинус меньшего из углов.

Ответ: $0{,}875 \approx 0{,}88$

В-5 Три попарно касающиеся сферы касаются также плоскости треугольника со сторонами 5, 6, 7 в вершинах этого треугольника. Найдите произведение радиусов этих трёх сфер.

Ответ: 26.25

Решение. Пусть три шара касаются плоскости и попарно друг друга. Найдем соотношение между произведением длин сторон треугольника, образованного точками касания шаров с плоскостью, и произведением радиусов шаров.

Пусть O_a, O_b, O_c — центры шаров, их радиусы — r_A, r_B, r_C, они касаются плоскости в точках A, B, C и $AB = c, BC = a, CA = b$. Точки ABO_BO_A образуют прямоугольную трапецию со сторонами $AB = c$, $BO_B = r_B$, $AO_A = r_A$, $O_BO_A = r_A + r_B$, основания которой — BO_B и AO_A, причём $BO_B \perp AB$, $AO_A \perp AB$. Пусть, для определённости, $r_B \geqslant a_A$. Проведём из O_A к стороне BO_B высоту O_AD. Точки AO_ADB образуют прямоугольник, и $O_AD = AB = c$. $O_BD = r_B - r_A$, и для прямоугольного треугольника O_ADO_B можно написать теорему Пифагора: $c^2 = (r_A + r_B)^2 - (r_A - r_B)^2$, и, значит, $c = 2\sqrt{r_Ar_B}$. Рассматривая другие пары шаров, аналогично получим $b = 2\sqrt{r_Ar_C}$ и $a = 2\sqrt{r_Br_C}$. Поэтому $abc = 8r_Ar_Br_C$.

В-6 Три попарно касающиеся сферы касаются также плоскости треугольника со сторонами 7, 8, 9 в вершинах этого треугольника. Найдите произведение радиусов этих трёх сфер.

Ответ: 63

В-7 Три попарно касающиеся сферы радиусов 3, 5 и 6 касаются также плоскости треугольника в вершинах этого треугольника. Найдите произведение сторон этого треугольника.

Ответ: 720

В-8 Три попарно касающиеся сферы радиусов 2, 4 и 7 касаются также плоскости треугольника в вершинах этого треугольника. Найдите произведение сторон этого треугольника.

Ответ: 448

Задача 6.

В-1

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,25

Решение. Справедливы неравенства

$$\frac{x}{x^2+9} \leqslant \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{x^2-6x+21} = \frac{1}{(x-3)^2+12} \leqslant \frac{1}{12}, \qquad \cos 2\pi x \leqslant 1.$$

Все эти неравенства становятся одновременно равенствами только при $x = 3$.

В-2

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+16} + \frac{1}{x^2-8x+17} + \cos \pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: $2,125 \approx$ 2,13

В-3

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+25} + \frac{1}{x^2-10x+32} + \cos 2\pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: $\frac{87}{70} \approx$ 1,24

В-4

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+36} + \frac{1}{x^2-12x+37} + \cos \pi x.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,08

Задача 7.

В-1

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = 8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 506,25

Решение. Если x_1 и x_2 корни этого уравнения, то $x_1 + x_2 = -2a$, $x_1x_2 = -8a$. Поэтому $x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) = 0$, то есть $(x_1 - 4)(x_2 - 4) = 16$. Пусть, для определённости, $x_1 \leqslant x_2$. Тогда возможны следующие варианты (см. таблицу)

$(x_1 - 4)$	$=$	-16	-8	-4	1	2	4
$(x_2 - 4)$	$=$	-1	-2	-4	16	8	4
x_1	$=$	-12	-4	0	5	6	8
x_2	$=$	3	2	0	20	12	8
a	$=$	4.5	1	0	-12.5	-9	-8

Исключаем варианты $a = 0$ и $a = -8$, потому что при них корни одинаковы. Остаются значения $a = 4.5, a = 1, a = -9, a = -12.5$.

В-2

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = 16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 31,64

В-3

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2ax = -8a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 506,25

В-4

Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4ax = -16a$ имеет два различных целых корня. В ответ запишите произведение всех таких a, при необходимости округлив до сотых.

Ответ: 31,64

Задача 8.

В-1

Внутри выпуклого n-угольника расположено 100 точек так, что никакие три из этих $n+100$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+100$ точек. При каком максиальном значении n не может получиться более 300 треугольников?

Ответ: 102

Решение. Если каждая точка является вершиной какого-то треугольника, то сумма углов всех полученных треугольников равна $180^\circ \cdot (n-2) + 360^\circ \cdot 100 = 180^\circ \cdot (n-2+200) = 180^\circ \cdot (n+198)$. Значит, получается $\frac{180^\circ \cdot (n+198)}{180^\circ} = n+198$ треугольников. Если какая-то из точек в разрезании не участвует, то треугольников будет меньше. Значит, $n+198 \leqslant 300$, $n \leqslant 102$.

В-2

Внутри выпуклого 200-угольника расположено n точек так, что никакие три из этих $n+200$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+200$ точек. При каком максиальном значении n не может получиться более 400 треугольников?

Ответ: 101

В-3

Внутри выпуклого n-угольника расположено 200 точек так, что никакие три из этих $n+200$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+200$ точек. При каких значениях n не может получиться более 600 треугольников?

Ответ: 202

В-4

Внутри выпуклого 100-угольника расположено n точек так, что никакие три из этих $n+100$ точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами каждого из которых являются 3 из данных $n+100$ точек. При каких значениях n не может получиться более 500 треугольников?

Ответ: 201

Задача 9.

B-1

Дан многочлен $P(x)$ степени 10 со старшим коэффициентом 1. График $y = P(x)$ целиком лежит выше оси Ox. Многочлен $-P(x)$ разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимают значение -3. Найдите $P(2020)$.

Ответ: 243

Решение. Заметим, что поскольку график $y = P(x)$ целиком лежит выше оси Ox, то у многочлена $P(x)$ нет действительных корней. Это значит, что все неприводимые многочлены в разложении имеют степень 2, а их количество равно 5. Так как у многочлена $-P(x)$ будет такое же количество неприводимых многочленов в разложении, и все они принимают значение -3 в точке $x = 2020$, то $-P(2020) = (-3)^5 = -243$. Отсюда $P(2020) = 243$.

B-2

Дан многочлен $P(x)$ степени 12 со старшим коэффициентом 1. График $y = P(x)$ целиком лежит выше оси Ox. Многочлен $P(x)$ разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимают значение -3. Найдите $P(2020)$.

Ответ: 729

B-3

Дан многочлен $P(x)$ степени 20 со старшим коэффициентом 1. График $y = P(x)$ целиком лежит выше оси Ox. Данный многочлен разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимют значение 2. Найти $P(2020)$.

Ответ: 1024

B-4

Дан многочлен $P(x)$ степени 18 со старшим коэффициентом -1. График $y = P(x)$ целиком лежит ниже оси Ox. Многочлен $P(x)$ разложили на неприводимые множители (то есть такие многочлены, которые не могут быть представлены в виде произведения двух непостоянных многочленов). Известно, что при $x = 2020$ все полученные неприводимые многочлены принимют значение -2. Найти $P(2020)$.

Ответ: -512

B-5

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2 - 210x + 11000}{\sqrt[2021]{x^{2021} - 420x^{2020}}} > 1.$$

Ответ: 421

.

Решение. Решим задачу в общем виде, указав ограничения на параметры a, b, c: Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-(a+b)x+ab}{\sqrt[2021]{x^{2021}-cx^{2020}}}>1.$$

Считаем, что a, b, c натуральные числа, $1\leqslant a<b<a+2\sqrt{a}$, $c\geqslant a+b$, $b<\frac{2020c}{2021}$.

Решение лежит в области $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$.

Обозначим: $f(x)=x^2-(a+b)x+ab$, $g(x)=x^{2021}-cx^{2020}$.

Покажем, что на промежутке (a,b) решений нет. Для $x\in(a,b)$

$$f(x)\leqslant|ab-\frac{(a+b)^2}{4}|=\frac{1}{4}(a-b)^2.$$

Функция g убывает на промежутке $(0;\frac{2020c}{2021})$. Поэтому на промежутке (a,b) выполнено

$$|g(x)|\geqslant|g(a)|=(c-a)a^{2020}>a^{2021},$$

Итого в левой части неравенства стоит величина, не превосходящая

$$\frac{1}{4}\frac{(b-a)^2}{a},$$

что меньше 1, так как $\frac{1}{4}\frac{(b-a)^2}{a}<1\Leftrightarrow b<a+2\sqrt{a}$.

На промежутке $(c,c+1)$ целых решений нет.

Покажем, что любой $x\geqslant c+1$ удовлетворяет неравенству. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{x-(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt[2021]{1-\frac{c}{x}}}>1,$$

В силу условия $c\geqslant a+b$ числитель больше 1. Знаменатель же меньше 1, поэтому левая часть неравенства больше 1.

Ответ: $c+1$

B-6

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-171x+7290}{\sqrt[2021]{x^{2021}-215x^{2020}}}>1.$$

Ответ: 216

.

B-7

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-251x+15730}{\sqrt[2021]{x^{2021}-374x^{2020}}}>1.$$

Ответ: 375

.

B-8

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-294x+21600}{\sqrt[2021]{x^{2021}-517x^{2020}}}>1.$$

Ответ: 518

.

B-9
Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-210x+11000}{\sqrt[2021]{x^{2021}-425x^{2020}}}>1.$$

Ответ: 426

.

B-10
Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-171x+2290}{\sqrt[2021]{x^{2021}-219x^{2020}}}>1.$$

Ответ: 220

.

B-11
Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-251x+15730}{\sqrt[2021]{x^{2021}-379x^{2020}}}>1.$$

Ответ: 380

.

B-12
Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x^2-294x+21600}{\sqrt[2021]{x^{2021}-519x^{2020}}}>1.$$

Ответ: 520

.

Задача 10.

В-1

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2+y^2=2x+2y+23$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x-1|+|y-1|=5$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.

Ответ: 1250

Решение. Множество A есть $(x-1)^2+(y-1)^2=25$, то есть это окружность с центром (1; 1) и радиусом 5. Множество B есть квадрат с вершинами (-4; 1), (1; 6), (6; 1), (1; -4). Центр квадрата – точка (1; 1), диагонали квадрата равны 10, стороны равны $5\sqrt{2}$. Множество C состоит из 4-х точек на окружности: (-4; 1), (1; 6), (6; 1), (1; -4), они же вершины вписанного квадрата. Обозначим их Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Если теперь взять точку X на дуге Y_2Y_3 (для определенности), обозначить расстояние от X до прямой Y_1Y_2 через a, и учесть, что $\angle Y_2XY_1 = \frac{\angle Y_2OY_1}{2} = 45^\circ$, то получим: $XY_1 \cdot XY_2 = \frac{XY_1 \cdot XY_2 \cdot 2\sin 45^\circ}{2\sin 45^\circ} = S_{XY_1Y_2} \cdot \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{Y_1Y_2 \cdot a}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} \cdot a}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 10a$. Аналогично $XY_3 \cdot XY_4 = 10(5\sqrt{2}-a)$. Тогда $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot XY_4 = 100a(5\sqrt{2}-a)$. Максимум этой квадратичной функции достигается при $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ и равен 1250. Заметим, что это означает, что точка X находится в середине дуги Y_2Y_3 (или любой из трех остальных дуг).

В-2

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2+y^2=2x+2y+14$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x-1|+|y-1|=4$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.

Ответ: 512

В-3

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2+y^2=2x+2y+7$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x-1|+|y-1|=3$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.

Ответ: 162

В-4

Множество A на плоскости Oxy задается уравнением $x^2+y^2=2x-2y+34$. Множество B на той же плоскости задается уравнением $|x-1|+|y+1|=6$. Множество C — пересечение множеств A и B. Какое наибольшее значение может принимать произведение длин n отрезков $XY_1 \cdot XY_2 \cdot XY_3 \cdot \ldots \cdot XY_n$, где точка X — произвольно выбранная точка из множества A, а точки $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ — все элементы множества C.

Ответ: 2592
