

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2019/2020 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 класса с ответами и решениями

1.1. (2 балла) Средний возраст сотрудников фирмы, состоящей из 13 человек, составляет 35 лет. В фирму приняли на работу нового сотрудника, после чего средний возраст сотрудников составил 34 года. Найдите возраст нового сотрудника.

1.2. Средний возраст сотрудников фирмы, состоящей из 13 человек, составляет 36 лет. В фирму приняли на работу нового сотрудника, после чего средний возраст сотрудников составил 35 лет. Найдите возраст нового сотрудника.

1.3. Средний возраст сотрудников фирмы, состоящей из 13 человек, составляет 37 лет. В фирму приняли на работу нового сотрудника, после чего средний возраст сотрудников составил 36 лет. Найдите возраст нового сотрудника.

2.1. (2 балла) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\angle BAD = 50^\circ$, $\angle CAD = 20^\circ$ и $AD = BD$. Найдите $\cos \angle C$.

2.2. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle CAD = 15^\circ$ и $AD = BD$. Найдите $\sin \angle C$.

2.3. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\angle BAD = 70^\circ$, $\angle CAD = 10^\circ$ и $AD = BD$. Найдите $\operatorname{tg} \angle C$.

3.1. (12 баллов) Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 240 рублей. Два ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 440 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластика, 4 ручек и 6 фломастеров?

3.2. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 250 рублей. Три ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 690 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластика, 9 ручек и 8 фломастеров?

3.3. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей. Два ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 420 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластика, 4 ручек и 6 фломастеров?

3.4. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей. Три ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 620 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластика, 9 ручек и 8 фломастеров?

4.1. (12 баллов) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 35° , отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K . Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2 .

4.2. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 25° , отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K . Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2 .

4.3. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 40° , отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K . Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2 .

4.4. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 20° , отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K . Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2 .

5.1. (12 баллов) Уравнение $x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{6}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{6}}{1+x_1}\right)^2.$$

5.2. Уравнение $x^2 - 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{7}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{7}}{1+x_1}\right)^2.$$

5.3. Уравнение $x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3\sqrt{3}x_1}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}x_2}{1-x_1}\right)^2.$$

5.4. Уравнение $x^2 - 7x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{5}}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{5}}{1-x_1}\right)^2.$$

6.1. (12 баллов) Из пункта A в пункт B в 13:00 одновременно выехали автобус и велосипедист. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил велосипедиста в пункте C в 13:10. Вернувшись в пункт A , автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал велосипедиста в пункте D , находящемся на расстоянии $\frac{2}{3}$ км от пункта C . Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и велосипедиста постоянны.

6.2. Из пункта A в пункт B в 11:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 11:10. Вернувшись в пункт A , автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D , находящемся на расстоянии $\frac{1}{3}$ км от пункта C . Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

6.3. Из пункта A в пункт B в 10:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 10:15. Вернувшись в пункт A , автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D , находящемся на расстоянии $\frac{1}{4}$ км от пункта C . Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 5 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

6.4. Из пункта A в пункт B в 14:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 14:10. Вернувшись в пункт A , автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D , находящемся на расстоянии $\frac{2}{15}$ км от пункта C . Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

7.1. (12 баллов) Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b .

7.2. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + 3x^3 + x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b .

7.3. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b .

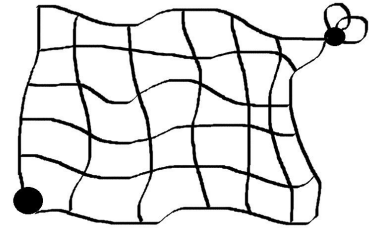
7.4. Числа a и b таковы, что многочлен $x^4 + 3x^3 + x^2 + ax + b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите b .

8.1. (12 баллов) В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Найдите площадь треугольника, если известно, что $AL = 2$, $BL = 3\sqrt{10}$ и $CL = 3$.

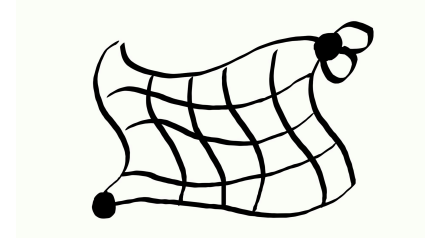
8.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Найдите площадь треугольника, если известно, что $AL = 3$, $BL = 6\sqrt{5}$ и $CL = 4$.

8.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Найдите площадь треугольника, если известно, что $AL = 2$, $BL = \sqrt{30}$ и $CL = 5$.

9.1. (12 баллов) Целеустремлённый паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?



9.2. Целеустремлённый паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?



10.1. (12 баллов) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 3x + \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} - 1$ на луче $x > 0$.

10.2. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2} - 3$ на луче $x < 0$.

10.3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} + 5$ на луче $x < 0$.

10.4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + 4$ на луче $x > 0$.