Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 5–10 классов

1.1. [5–6.1 (20 баллов)] В некоторой семье папа работает по графику «2 через 2» (2 дня работает, 2 дня выходные), мама — по графику «1 через 2» (1 день работает, 2 дня выходные), а дети учатся по пятидневной рабочей неделе (с понедельника по пятницу). В субботу 2 сентября мама навещала бабушку в деревне, а следующий день вся семья провела дома. В какой день у них снова будет общий выходной?

Ответ: 23 сентября (суббота).

Решение. По условию, 2 и 3 сентября были для мамы выходными, поэтому её рабочими днями далее в сентябре являются числа 4, 7, 10 и т. д. В воскресенье, 3 сентября, был выходной у папы, но неизвестно, был ли у него выходным предыдущий день. Рассмотрим 2 случая.

1) Если 2 сентября у папы был выходной, то его рабочими днями далее в сентябре являются числа 4, 5, 8, 9, 12, 13 и т. д. Отметим в календаре, в какие субботы и воскресенья работают родители:

Число	2 (сб)	3 (вс)	9 (сб)	10 (вс)	16 (сб)	17 (вс)	23 (сб)	24 (вс)
Мама				Р	Р			
Папа			Р		Р	Р		Р

2) Если 2 сентября папа работал, то его рабочими днями далее в сентябре являются числа 5, 6, 9, 10, 13, 14 и т. д. В этом случае получаем следующую таблицу:

Число	2 (сб)	3 (вс)	9 (сб)	10 (вс)	16 (сб)	17 (вс)	23 (сб)	24 (вс)
Мама				Р	Р			
Папа	Р		Р	Р		Р		

В обоих случаях следующим общим выходным в семье будет суббота, 23 сентября.

2.1. [5–6.2 (20 баллов), 7–8.2 (15 баллов), 9.2 (15 баллов)] Сколькими способами можно прочитать слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

```
Р О Т О Р          Д О Х О Д
О Т О Р            О Х О Д
Т О Р              Х О Д
О Р                О Д
Р                  Д
```

Ответ: 25.

Решение. Число способов прочтения, которые начинаются с верхней левой буквы «Р», равно $2^4 = 16$, так как необходимо сделать 4 шага по буквам и каждый шаг направлен вправо или вниз. Если вычеркнуть рассмотренную букву «Р», то остаётся подсчитать число оставшихся способов на рис. 1.

```
  О Т О Р          О Т О              Т                Т
О Т О Р          О Т О Р            Т О              Т
Т О Р            Т О Р            Т О Р            Т О
О Р              О Р              О Р              О Р
Р                Р                Р                Р
   Рис. 1           Рис. 2           Рис. 3           Рис. 4
```

Зафиксируем теперь направление чтения: будем считать, что слово читается так, что первая буква «Р» в нём находится не ниже последней. Для правой верхней буквы «Р» получаем 2 способа. Вычеркнем эту букву (рис. 2) и рассмотрим следующую букву «Р». Число способов прочтения, начинающихся с неё, равно 3. Вычеркнем и эту букву, а также буквы «О», рядом с которыми не осталось ни одной буквы «Р», так как больше нет способов прочтения, содержащих эти буквы «О» (рис. 3). Следующая буква «Р» находится в такой же позиции, что и предыдущая, поэтому с неё начинается также 3 возможных способа. Наконец, вычеркнем её и расположенную выше букву «О» (рис. 4). Тогда остаётся всего 1 способ прочтения.

Итого получаем $16 + 2 + 3 + 3 + 1 = 25$ способов.

2.2. Сколькими способами можно прочитать слово «ДОХОД», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

Ответ: 25.

3.1. [5–6.3 (20 баллов)] В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе кислота будет составлять $\frac{1}{20}$ часть, а во второй доля кислоты будет равна $\frac{7}{30}$. Какую часть будет составлять кислота в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

Ответ: $\frac{21}{200} = 0{,}105$.

Решение. Если кислота составляет в первой колбе $\frac{1}{20}$ часть, то в ней находится $10 : \frac{1}{20} = 200$ г раствора, поэтому воды в ней 190 г. Аналогично для второй колбы находим, что всего раствора в ней $20 : \frac{7}{30} = \frac{600}{7}$ г, а воды $\frac{600}{7} - 20 = \frac{460}{7}$ г. Следовательно, в четвёртой колбе находится $190 + \frac{460}{7} = \frac{1790}{7}$ г воды. Тогда доля кислоты в третьей колбе после смешивания с таким количеством воды будет равна

$$\frac{30}{30 + \frac{1790}{7}} = \frac{210}{2000} = \frac{21}{200} = 0{,}105.$$

4.1. [7–8.3 (15 баллов)] В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе концентрация кислоты будет составлять $5\,\%$, а во второй — $23\frac{1}{3}\,\%$. Какова будет концентрация кислоты в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

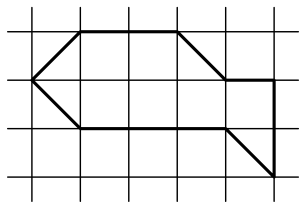
Ответ: $10{,}5\,\%$.

Решение. См. решение предыдущей задачи.

4.2. В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 30 г, в третьей 40 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе концентрация кислоты будет составлять $8\,\%$, а во второй — $28\frac{28}{29}\,\%$. Какова будет концентрация кислоты в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

Ответ: $17{,}5\,\%$.

5.1. [5–6.4 (п. а) — 10 баллов, п. б) — 20 баллов)] На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Требуется разрезать её на несколько частей и сложить из них квадрат (поворачивать части можно, переворачивать нельзя). Можно ли это сделать при условии, что а) частей не больше четырёх; б) частей не больше пяти, причём все они — треугольники? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



Ответ: а) да; б) да.

Решение. Возможные варианты разрезания для пп. а) и б) изображены на рис. 5, а) и б).

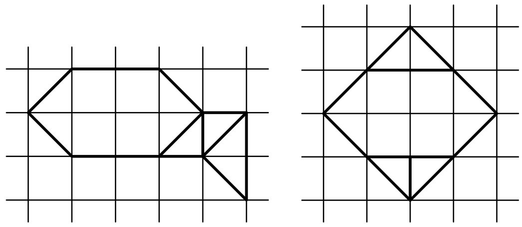


Рис. 5, а)

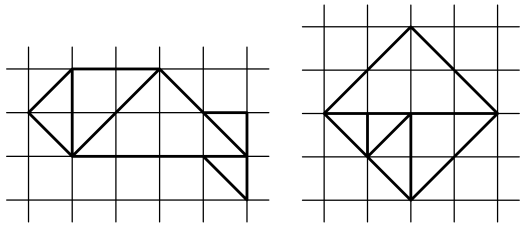
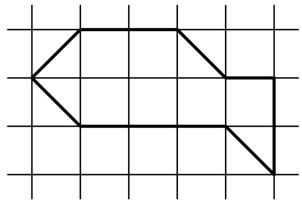


Рис. 5, б)

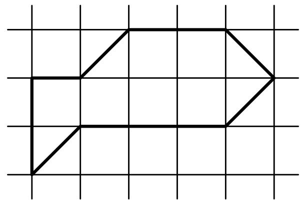
6.1. [7–8.5 (20 баллов)] На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Можно ли разрезать её на 5 треугольников и сложить из них квадрат? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



Ответ: да.

Решение. См. рис. 5 б).

6.2. На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Можно ли разрезать её на 5 треугольников и сложить из них квадрат? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



Ответ: да.

7.1. [5–6.5 (п. а) — 20 баллов, п. б) — 20 баллов)] Вовочка складывает числа в столбик следующим образом: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр в одинаковых разрядах пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, для суммы $248 + 208$ он получил бы значение 4416.

а) В скольких случаях Вовочка получит правильный ответ, складывая всевозможные пары трёхзначных чисел? (Если некоторые два различных числа Вовочка уже складывал ранее в другом порядке, то он этого не замечает.)

б) Найдите наименьшую возможную разность между верным ответом и ответом Вовочки для всех остальных пар трёхзначных чисел.

Ответ: а) 244620; б) 1800.

Решение. а) Вовочка получит правильный ответ в том и только том случае, если при сложении последних и предпоследних цифр получится также цифра, т. е. не будет переноса разряда. Подсчитаем, для скольких пар цифр их сумма не превосходит 9. Если одна цифра равна 0, то для другой имеем 10 вариантов (любая цифра); если одна цифра равна 1, то для другой есть 9 вариантов (от 0 до 8), и т.д.; если одна цифра равна 9, то для другой остаётся лишь 1 вариант (равна 0). Итого вариантов $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$. Первая цифра каждого из складываемых трёхзначных чисел может быть любой от 1 до 9. Таким образом, всего получаем $9 \cdot 9 \cdot 55 \cdot 55 = 245025$ вариантов. При этом одинаковые пары чисел, для которых Вовочка получит правильный ответ, учтены дважды. Таких пар всего $9 \cdot 5 \cdot 5 = 405$. Следовательно, правильный ответ Вовочка получит в $245025 - 405 = 244620$ случаях.

б) Пусть $\overline{abc}$ и $\overline{xyz}$ — складываемые Вовочкой числа ($a, x \geqslant 1$, так как числа трёхзначны), их сумма равна $100(a+x) + 10(b+y) + (c+z)$. Если Вовочка получил неправильный ответ, то при сложении последних или предпоследних цифр (или в обоих случаях) сумма была двузначной, т. е. возможны три случая.

1) Если $b + y \geqslant 10$, $c + z < 10$, то Вовочка получит ответ $1000(a + x) + 10(b + y) + (c + z)$, а разность между верным ответом и ответом Вовочки равна $900(a + x)$.

2) Если $b + y < 10$, $c + z \geqslant 10$, то ответ Вовочки равен $1000(a + x) + 100(b + y) + (c + z)$, что отличается от верного ответа на $900(a + x) + 90(b + y)$.

3) Если $b + y \geqslant 10$, $c + z \geqslant 10$, то Вовочка получит ответ $10000(a + x) + 1000(b + y) + (c + z)$, в этом случае разность равна $9900(a + x) + 990(b + y)$.

Итак, в каждом из случаев разность ответов будет не меньше, чем $900(a+x) \geqslant 1800$. Разность, равная 1800, получится, например, при сложении чисел 105 и 105: Вовочка получит ответ 2010 при верном ответе 210.

8.1. [9.5 (15 баллов)] Вовочка складывает трёхзначные числа в столбик следующим образом: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр в одинаковых разрядах пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, для суммы 248+208 он получил бы значение 4416. Найдите наименьшую возможную положительную разность между ответом Вовочки и верным ответом.

Ответ: 1800.

Решение. См. решение п. б) предыдущей задачи.

9.1. [7–8.1 (15 баллов)] Найдите все решения числового ребуса АБ $=$ Б$^{\text{В}}$ (разным буквам соответствуют разные цифры; в левой части стоит двузначное число, а не произведение цифр А и Б).

Ответ: $32 = 2^5$, $36 = 6^2$, $64 = 4^3$.

Решение. Если В $= 1$, то Б$^{\text{В}}$ $=$ Б — не двузначное число. Выпишем, какие двузначные числа получаются, если В $\geqslant 2$:

1) В $= 2$: $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$. В этом случае решением решением ребуса является только равенство $36 = 6^2$.

2) В $= 3$: $3^3 = 27$, $4^3 = 64$. В этом случае также получаем единственное решение $64 = 4^3$.

3) В $= 4$: $2^4 = 16$, $3^4 = 81$. В этом случае решений нет.

4) В $= 5$: $2^5 = 32$. В этом случае имеем единственное решение $32 = 2^5$.

5) В $= 6$: $2^6 = 64$ — решением не является.

При В $\geqslant 6$ и Б $\geqslant 2$ число Б$^{\text{В}}$ всегда будет больше 100. Таким образом, ребус имеет 3 решения $32 = 2^5$, $36 = 6^2$, $64 = 4^3$.

9.2. Найдите все решения числового ребуса А$^{\text{Б}}$ $=$ ВА (разным буквам соответствуют разные цифры; в правой части стоит двузначное число, а не произведение цифр В и А).

Ответ: $2^5 = 32$, $6^2 = 36$, $4^3 = 64$.

10.1. [7–8.4 (15 баллов)] Найдите все a, при которых уравнение $a^2(x-2)+a(39-20x)+20 = 0$ имеет хотя бы два различных корня.

Ответ: 20.

Решение. Уравнение равносильно следующему: $(a-20)(ax-2a-1) = 0$. При $a = 0$ оно не имеет корней, при $a = 20$ решением является любое x, при остальных a корень ровно один.

10.2. Найдите все a, при которых уравнение $a^2(x+2) - a(10x+21) + 10 = 0$ имеет хотя бы два различных корня.

Ответ: 10.

11.1. [7–8.6 (20 баллов)] На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите длину отрезка AN.

Ответ: 1.

Решение. Поставим точку K на продолжении отрезка NC за точку C. Точка M лежит одновременно на биссектрисах углов BAC и ANC, а значит, равноудалена от прямых AC и NC и, стало быть, лежит на биссектрисе угла ACK. Тогда, учитывая равенство углов M и C в равнобедренном треугольнике AMC, из равенства накрест лежащих углов CMA и MCK получаем параллельность прямых AM и NC. Отсюда следует, что накрест лежащие углы MAC

и ACN равны $\angle BAC/2$, а значит, $\angle ANC = \angle BAC - \angle ACN = \angle BAC/2$. Получили, что треугольник NAC равнобедренный и $AN = AC = AM = 1$.

11.2. На биссектрисе угла ACB треугольника ABC отмечена точка N, а на продолжении стороны AC за точку C — точка M так, что $BC = CN = 2$ и $\angle CMN = \angle BMN$. Найдите длину отрезка CM.

Ответ: 2.

12.1. [9.7 (15 баллов), 10.6 (15 баллов)] На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CNM.

Ответ: 1.

Решение. См. решение предыдущей задачи.

12.2. На биссектрисе угла ACB треугольника ABC отмечена точка N, а на продолжении стороны AC за точку C — точка M так, что $BC = CN = 2$ и $\angle CMN = \angle BMN$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BMN.

Ответ: 2.

13.1. [7–8.7 (20 баллов), 9.8 (15 баллов), 10.8 (20 баллов)] Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, …, 7, 8, 7, 6, …, 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1?

Ответ: 20.

Решение. Игроки №5 и №9 вместе набрали $72 + 84 = 156 = 12 \cdot 13$ очков. За одно вращение они могут вместе получить не больше 12 очков. Значит, в каждом из 13 вращений они вместе получили 12 очков. Заметим, что 12 очков они получают в виде одной из сум $8 + 4$, $7 + 5$, $6 + 6$, $5 + 7$ или $4 + 8$, когда сектор 8 оказывается перед одним из них или между ними, т. е. перед одним из игроков с номерами 6, 7, 8. В каждом из этих пяти случаев игрок №1 получает соответственно 4, 3, 2, 1 или 0 очков. Это можно выразить формулой $x_1 = \frac{x_5 - x_9}{2} + 2$, где x_n — количество очков за это вращение у игрока с номером n. Тогда количество очков игрока №1 после 13 вращений равно $\frac{72-84}{2} + 2 \cdot 13 = 20$.

13.2. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, …, 7, 8, 7, 6, …, 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 13?

Ответ: 32.

13.3. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, …, 7, 8, 7, 6, …, 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 11 вращений стола игрок номер 6 набрал в сумме 78 очков, а игрок номер 10 набрал в сумме 54 очка. Сколько очков набрал игрок номер 2?

Ответ: 34.

13.4. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, …, 7, 8, 7, 6, …, 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку.

После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 11 вращений стола игрок номер 6 набрал в сумме 78 очков, а игрок номер 10 набрал в сумме 54 очка. Сколько очков набрал игрок номер 14?

Ответ: 10.

14.1. [9.1 (15 баллов), 10.1 (15 баллов)] Вычислите

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2017\sqrt{1+2018\cdot 2020}}}}.$$

Ответ: 3.

Решение. Поскольку $2018\cdot 2020=2019^2-1$, $2017\cdot 2019=2018^2-1$, …, получаем

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2017\sqrt{1+2018\cdot 2020}}}}=$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2016\sqrt{1+2017\cdot 2019}}}}=\ldots=\sqrt{1+2\cdot 4}=3.$$

14.2. Вычислите $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2018\sqrt{1+2019\cdot 2021}}}}$.

Ответ: 3.

15.1. [9.3 (15 баллов)] В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна 1 и является одновременно её высотой. Из точек A и C к сторонам CD и AB соответственно проведены перпендикуляры AE и CF. Найдите AD, если $AD=CF$ и $BC=CE$.

Ответ: $\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Решение. Пусть $AD=CF=x$, $BC=CE=y$. Тогда из прямоугольных треугольников ABC, ACE и ACD по теореме Пифагора находим $AB=\sqrt{1+y^2}$, $AE=\sqrt{1-y^2}$, $CD=\sqrt{1+x^2}$. Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}CF\cdot AB$, откуда получаем

$$y=x\sqrt{1+y^2}\quad\Rightarrow\quad y^2=x^2(1+y^2)\quad\Rightarrow\quad y^2=\frac{x^2}{1-x^2}.$$

Аналогично, площадь треугольника ACD равна $S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD=\frac{1}{2}AE\cdot CD$, поэтому $x=\sqrt{1-y^2}\sqrt{1+x^2}$. Подставляя сюда полученное ранее выражение y^2 через x^2, с учётом условия $0<x<1$ находим

$$x=\frac{\sqrt{1-2x^2}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\quad\Rightarrow\quad x^2(1-x^2)=(1-2x^2)(1+x^2)\quad\Rightarrow\quad x^2-x^4=1-x^2-2x^4\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x^4+2x^2-1=0\quad\Rightarrow\quad (x^2+1)^2=2\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

15.2. В трапеции $KLMN$ диагональ KM равна 1 и является одновременно её высотой. Из точек K и M к сторонам MN и KL соответственно проведены перпендикуляры KP и MQ. Найдите LM, если $KN=MQ$ и $LM=MP$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

16.1. [9.4 (15 баллов), 10.4 (15 баллов)] На графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, где $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

Решение. Квадрат расстояния от точки $\left(x, x + \frac{1}{x}\right)$ до начала координат равен

$$r^2(x) = x^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем

$$r^2(x) = 2x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \geqslant 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2,$$

причём равенство достигается при условии $2x^2 = \frac{1}{x^2}$, т. е. $x^4 = \frac{1}{2}$. Поскольку $x > 0$, отсюда находим $x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $y = x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$.

16.2. На графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

17.1. [9.6 (15 баллов), 10.3 (15 баллов)] Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.

Ответ: $2^{100} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

Решение. Количество $\tau(n)$ различных натуральных делителей числа n, допускающего разложение на простые множители

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \tag{1}$$

(здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqslant 1$), выражается формулой

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1). \tag{2}$$

В самом деле, любой делитель числа n имеет вид $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$, при этом каждый показатель β_i можно выбрать $\alpha_i + 1$ способом (от 0 до α_i).

Таким образом, требуется найти наименьшее число n вида (1), для которого

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101,$$

то есть определить соответствующие показатели $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и простые множители $p_1, \ldots, p_k$.

Покажем, что искомым числом является число $2^{100} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

Можно считать (перенумеровав при необходимости простые множители), что показатели в разложении (1) упорядочены по невозрастанию: $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$. Кроме того, несложно видеть, что для фиксированного (упорядоченного по невозрастанию) набора показателей среди всех чисел вида (1) наименьшим является число, у которого $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — это первые k простых чисел, взятые в порядке увеличения[1]. Действительно, если $p_i > p_j$, $\alpha_i > \alpha_j$, то $p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} > p_j^{\alpha_i} p_i^{\alpha_j}$ (поскольку $p_i^{\alpha_i - \alpha_j} > p_j^{\alpha_i - \alpha_j}$), и перестановка множителей p_i и p_j позволяет уменьшить искомое число. При этом, очевидно, должны быть задействованы все наименьшие простые множители.

Далее, заметим, что число 101 должно входить в произведение (2) отдельным множителем, так как иначе $\alpha_1 + 1 \geqslant 101 \cdot 2$ и

$$p_1^{\alpha_1} \geqslant 2^{201} > 2^{100} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7.$$

[1] С учетом случая, когда несколько показателей равны между собой и соответствующие множители можно менять местами.

Остается перебрать возможные разложения числа 2020 с отдельным множителем 101:

$$101 \cdot 20, \quad 101 \cdot 10 \cdot 2, \quad 101 \cdot 5 \cdot 4, \quad 101 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

и сравнить между собой числа

$$2^{100} \cdot 3^{19}, \quad 2^{100} \cdot 3^{9} \cdot 5, \quad 2^{100} \cdot 3^{4} \cdot 5^{3}, \quad 2^{100} \cdot 3^{4} \cdot 5 \cdot 7.$$

18.1. [10.2 (15 баллов)] Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили красной краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков хотя бы одна грань красная, а у оставшихся двух третей все грани не окрашены. Найдите длину параллелепипеда, если она на 2 см больше ширины и на 4 см больше высоты.

Ответ: 18 см.

Решение. Пусть длина параллелепипеда равна n см, тогда ширина равна $n-2$, а высота равна $n-4$. Получится $n(n-2)(n-4)$ кубиков. Неокрашенных кубиков будет $(n-2)(n-4)(n-6)$ («убирается» слой шириной в 1 кубик с каждой стороны). Получается уравнение $(n-2)(n-4)(n-7) = \frac{2}{3}n(n-2)(n-4)$ при условии $n \geq 7$. Его корни: $n=2, n=4, n=18$. Первые два корня не подходят. Значит, $n=18$, и это параллелепипед $18 \times 16 \times 14$.

18.2. Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили синей краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков все грани не окрашены, а у оставшихся двух третей хотя бы одна грань синяя. Найдите высоту параллелепипеда, если она на 4 см меньше длины и на 2 см меньше ширины.

Ответ: 5 см.

18.3. Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили зеленой краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков хотя бы одна грань зеленая, а у оставшихся двух третей все грани не окрашены. Найдите ширину параллелепипеда, если она на 2 см меньше длины и на 2 см больше высоты.

Ответ: 16 см.

18.4. Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили фиолетовой краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков все грани не окрашены, а у оставшихся двух третей хотя бы одна грань фиолетовая. Найдите высоту параллелепипеда, если она на 2 см меньше длины и на 2 см больше ширины.

Ответ: 7 см.

19.1. [10.5 (15 баллов)] Докажите, что уравнение

$$\sin(2020x) + \cos(2020x) = \frac{x}{5050} + 1$$

имеет по крайней мере 8 000 корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

Доказательство. Имеем $\sin(2020x) + \cos(2020x) = \sqrt{2}\sin\left(2020x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. На отрезке $[-2\pi; 2\pi]$ функция $\frac{x}{5050} + 1$ принимает только значения из отрезка $\left[1 - \frac{2\pi}{5050}; 1 + \frac{2\pi}{5050}\right] \subset [0; \sqrt{2}] \subset [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Поэтому (в силу непрерывности всех упомянутых функций) на каждом отрезке монотонности функции $\sqrt{2}\sin\left(2020x + \frac{\pi}{4}\right)$, длина которого равна полупериоду этой функции, то есть $\frac{\pi}{2020}$, уравнение имеет по крайней мере один корень (на самом деле ровно один, но для строгого доказательства нужны оценки производных). В отрезок $[-2\pi; 2\pi]$ таких отрезков умещается по крайней мере $4\pi : \frac{\pi}{2020} - 1 = 8079 > 8000$ корней.

19.2. Докажите, что уравнение

$$\sin(1010x) - \cos(1010x) = 1 - \frac{x}{2020}$$

имеет по крайней мере 10 000 корней, принадлежащих отрезку $[-5\pi; 5\pi]$.

19.3. Докажите, что уравнение

$$\cos(2020x) - \sin(2020x) = \frac{x}{3030} + 1$$

имеет по крайней мере 16 000 корней, принадлежащих отрезку $[-4\pi; 4\pi]$.

19.4. Докажите, что уравнение

$$\cos(3030x) + \sin(3030x) = 1 - \frac{x}{2020}$$

имеет по крайней мере 12 000 корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

20.1. [10.7 (15 баллов)] Функция f, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $f(1) + 1 > 0$;
2) $f(x+y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $2f(x) = f(x+1) - x + 1$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $f(10)$.

Ответ: 1014.

Решение. Если $h(x) = f(x) + x$, то из условия 2) получаем $h(x+y) = h(x)h(y)$. Тогда при $x = y = 0$ это равенство принимает вид $h(0)^2 = h(0)$, т. е. $h(0) = 0$ или $h(0) = 1$. В первом случае $h(x) \equiv 0$, что невозможно из-за условия 1). Если $a = h(1)$, то $h(x) = a^x$ при любых $x \in \mathbb{Z}$. Из условия 3) находим $a = 2$, тогда $h(10) = 2^{10} = 1024$, $f(10) = h(10) - 10 = 1014$.

20.2. Функция g, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $g(1) > 1$;
2) $g(x+y) + xg(y) + yg(x) = g(x)g(y) + x + y + xy$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $3g(x) = g(x+1) + 2x - 1$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $g(5)$.

Ответ: 248.

Решение. Пусть $g(1) = a$, тогда из условия 3) последовательно находим $g(2) = 3a - 1$, $g(3) = 9a - 6$, $g(4) = 27a - 23$, $g(5) = 81a - 76$. Из условия 2), подставляя $x = 4$ и $y = 1$, получаем после упрощений уравнение $a^2 - 5a + 4 = 0$, откуда $a = 1$ или $a = 4$. Случай $a = 1$ противоречит условию 1). Следовательно, $a = 4$, тогда $g(5) = 81a - 76 = 81 \cdot 4 - 76 = 248$.

20.3. Функция f, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $f(1) > -1$;
2) $f(x)f(y) - x - y + xy = f(x+y) - xf(y) - yf(x)$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $2f(x+1) = f(x) - x - 2$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $f(-7)$.

Ответ: 135.

20.4. Функция g, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $g(1) - 1 > 0$;
2) $g(x)g(y) + x + y + xy = g(x+y) + xg(y) + yg(x)$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $3g(x+1) = g(x) + 2x + 3$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $g(-6)$.

Ответ: 723.