Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. (2 балла) Из цифр 1, 3 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ: 1998.

Решение. Все возможные числа: 135, 153, 315, 351, 513, 531.

1.2. Из цифр 1, 2 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ: 1776.

2.1. (2 балла) В треугольнике один из углов меньше 50°, другой — меньше 70°. Найдите косинус третьего угла, если его синус равен $\frac{4}{7}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{33}}{7} \approx -0.82$.

Решение. Если $\sin\alpha = \frac{4}{7}$ и $\alpha > 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$, то $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{33}}{7}$ и $\cos\alpha < \frac{1}{2}$, поэтому $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$.

2.2. В треугольнике один из углов меньше 40°, другой — меньше 80°. Найдите косинус третьего угла, если его синус равен $\frac{5}{8}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{39}}{8} \approx -0.78$.

3.1. (12 баллов) Число

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2017}{2018!}$$

записали в виде несократимой дроби с натуральными числителем и знаменателем. Найдите две последние цифры числителя.

Ответ: 99.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2017}{2018!} = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2017!} - \frac{1}{2018!}\right) = 1 - \frac{1}{2018!} = \frac{2018! - 1}{2018!}.$$

В итоге получили несократимую дробь, а последние две цифры числа $2018! - 1$ — это две девятки.

3.2. Число

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2018}{2019!}$$

записали в виде несократимой дроби с натуральными числителем и знаменателем. Найдите три последние цифры числителя.

Ответ: 999.

4.1. (12 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ на продолжении стороны CD за точку D отмечена точка E. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а биссектриса угла ADE пересекает продолжение стороны AB в точке M. Найдите BC, если $MK = 8$ и $AB = 3$.

Ответ: $\sqrt{55} \approx 7.42$.

Решение. Поскольку BK — биссектриса угла ABC, треугольник ABK равнобедренный, $AB = AK$. Аналогично получаем, что $AD = AM$. Значит, треугольники AKM и ABD равны по двум катетам. Применяя в треугольнике AKM теорему Пифагора, находим $BC = AD = AM = \sqrt{MK^2 - AB^2} = \sqrt{55}$.

4.2. В прямоугольнике $ABCD$ на продолжении стороны CD за точку D отмечена точка E. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а биссектриса угла ADE пересекает продолжение стороны AB в точке M. Найдите BC, если $MK = 9$ и $AB = 4$.

Ответ: $\sqrt{65} \approx 8.06$.

4.3. В прямоугольнике $ABCD$ на продолжении стороны CD за точку D отмечена точка E. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а биссектриса угла ADE пересекает продолжение стороны AB в точке M. Найдите BC, если $MK = 10$ и $AB = 7$.

Ответ: $\sqrt{51} \approx 7.14$.

5.1. (12 баллов) Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $19a$, $\dfrac{124b}{13}$, $\dfrac{c}{13}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 247.

Решение. Пусть $b = aq$, $c = aq^2$. Свойства арифметической прогрессии и условия задачи приводят к уравнению $2 \cdot \frac{124aq}{13} = 19a + \frac{aq^2}{13} \Leftrightarrow q^2 - 248q + 247 = 0$, откуда $q = 1$ или $q = 247$. Убывающей геометрическая прогрессия может быть только при $q = 247$ (если, например, $a = -1$).

5.2. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $13a$, $\dfrac{59b}{9}$, $\dfrac{c}{9}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 117.

5.3. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $19a$, $\dfrac{67b}{7}$, $\dfrac{c}{7}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 133.

6.1. (12 баллов) У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 28.

Решение. Пусть какие-то две стрелки совпали, тогда через 30 секунд они совпадут вновь. Следовательно, стрелки в каждой такой паре совпадут ровно 2 раза за минуту. Таким образом, если n стрелок двигаются в одну сторону, а m стрелок — в другую, то $2mn = 54$, $mn = 27$. Следовательно, n может быть равно 1, 3, 9 или 27. Наибольшая сумма $m + n$ получается при $n = 1$, $m = 27$ (или наоборот) и равна 28.

6.2. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 12.

6.3. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 34.

6.4. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 14.

7.1. (12 баллов) Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые будут использованы обоими игроками в такой игре.

Ответ: 3.

Решение. Опишем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала первый игрок называет простое число, заканчивающееся на 9 и отличное от 79 (например, 19). Поскольку среди чисел 90, …, 99 простым является только число 97, следующим ходом второй игрок должен назвать это число. Тогда третьим ходом первый игрок называет 79, и второй проигрывает. За меньшее число ходов первый игрок выиграть не может, так как для любой цифры от 1 до 9 существует простое число из первой сотни, которое начинается с этой цифры.

7.2. Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые этот игрок назовёт в такой игре.

Ответ: 2.

8.1. (12 баллов) Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 64.

Решение. Сумма всех девяти чисел равна 45. Обозначим через x сумму двух чисел в первой строке, а через a то единственное из девяти чисел число, которое мы не размещаем в фигуре. Тогда $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 45 - a$, откуда $4x + a = 39$. Так как a — целое число от 1 до 9, то получаем 2 возможных варианта: либо $x = 9$, $a = 3$, либо $x = 8$, $a = 7$.

Если $a = 3$, то мы должны расставить числа 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 9, 10, 11 и 12. Возможные варианты для чисел первой строки: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5$.

Если в первой строке стоят 1 и 8, то во второй строке должны стоять 4 и 6, в третьей 2 и 9, в последней 5 и 7.

Если в первой строке стоят 2 и 7, то во второй строке должны стоять 1 и 9 (при других вариантах нельзя подобрать числа для третьей строки), в третьей 5 и 6, в последней 4 и 8.

Если в первой строке стоят 4 и 5, то во второй строке могут быть 1 и 9 или 2 и 8. Но и в том, и в другом случае числа для третьей строки найти нельзя.

Если $a = 7$, то мы должны расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 8, 9, 10 и 11. Сумма чисел в первой строке равна $8 = 5+3 = 6+2$.

Если в первой строке стоят 3 и 5, то во второй строке должны стоять 1 и 8, в третьей 6 и 4, в последней 2 и 9.

Если в первой строке стоят 6 и 2, то во второй строке могут стоять 1 и 8 или 4 и 5. Если там стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в следующей строке. Значит, там стоят 4 и 5, тогда в следующей строке стоят 1 и 9, а в последней 3 и 8.

Таким образом, всего получилось 4 варианта расстановки чисел без учета порядка чисел в строках. Так как в каждой строке числа можно менять местами, получается по $2^4 = 16$ вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем 64 варианта.

8.2. Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 2 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 48.

9.1. (12 баллов) Две окружности касаются внешним образом в точке K. На их общей внутренней касательной отмечена точка P таким образом, что $KP = 14$. Через точку P к окружностям проведены две секущие, причём одна из них высекает на первой окружности хорду $AB = 45$, а другая — на второй окружности хорду $CD = 21$, причём точка A лежит между точками B и P, а точка C — между точками D и P. Найдите отношение $BC : AD$.

Ответ: 1.75.

Решение. По теореме о касательной и секущей находим $AP = 4$, $CP = 7$. Кроме того, $PA\cdot PB = PK^2 = PC \cdot PD$, поэтому треугольники BPC и DPA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Значит, $BC : AD = CP : AP = \frac{7}{4}$.

9.2. Две окружности касаются внешним образом в точке K. На их общей внутренней касательной отмечена точка P таким образом, что $KP = 18$. Через точку P к окружностям проведены две секущие, причём одна из них высекает на первой окружности хорду $AB = 48$, а другая на второй окружности хорду $CD = 27$, причём точка A лежит между точками B и P, а точка C — между точками D и P. Найдите отношение $BC : AD$.

Ответ: 1.5.

10.1. (12 баллов) Про различные натуральные числа k, l, m, n известно, что найдутся такие три натуральных числа a, b, c, что каждое из чисел k, l, m, n является корнем или уравнения $ax^2 - bx + c = 0$, или уравнения $cx^2 - 16bx + 256a = 0$. Найдите $k^2 + l^2 + m^2 + n^2$.

Ответ: 325.

Решение. Если k, l — корни первого уравнения, то корнями второго являются числа $m = \frac{16}{k}$, $n = \frac{16}{l}$. Поэтому числа k, l, m, n — делители числа 16. Делителями 16 являются числа 1, 2, 4, 8 и 16, но число 4 не подходит, так как по условию все числа k, l, m, n различны. Значит, $k^2 + l^2 + m^2 + n^2 = 1^2 + 2^2 + 8^2 + 16^2 = 325$.

10.2. Про различные натуральные числа k, l, m, n известно, что найдутся такие три натуральных числа a, b, c, что каждое из чисел k, l, m, n является корнем или уравнения $ax^2 - bx + c = 0$, или уравнения $cx^2 - 8bx + 64a = 0$. Найдите $k^2 + l^2 + m^2 + n^2$.

Ответ: 85.