Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. (2 балла) Сколько корней имеет уравнение $x^2 - x\sqrt{5} + \sqrt{2} = 0$?

Ответ: 0.

Решение. Поскольку $D = 5 - 4\sqrt{2} < 0$, уравнение не имеет корней.

1.2. Сколько корней имеет уравнение $x^2 + x\sqrt{6} + \sqrt{2} = 0$?

Ответ: 2.

2.1. (2 балла) Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y = 9 - 3x$ и осями координат.

Ответ: 13.5.

Решение. Прямая пересекает оси координат в точках $(0,9)$ и $(3,0)$, поэтому $S = \frac{3\cdot 9}{2} = 13.5$.

2.2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y = 15 - 5x$ и осями координат.

Ответ: 22.5.

3.1. (12 баллов) Найдите x, если $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}} = \dfrac{16}{37}$.

Ответ: -0.25.

Решение. Последовательно находим:

$$2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}} = \frac{37}{16}, \quad 3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}} = \frac{16}{5}, \quad 4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}} = 5, \quad 5+\frac{1}{x} = 1, \quad x = -\frac{1}{4}.$$

3.2. Найдите x, если $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}} = \dfrac{42}{97}$.

Ответ: -0.5.

3.3. Найдите x, если $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}} = \dfrac{29}{67}$.

Ответ: $-\frac{1}{3} \approx -0.33$.

4.1. (12 баллов) В трапеции $ABCD$ на основаниях $AD = 17$ и $BC = 9$ отмечены точки E и F соответственно так, что $MENF$ — прямоугольник, где M и N — середины диагоналей трапеции. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 4.

Решение. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований, поэтому $MN = \frac{AD-BC}{2} = 4$. Так как $MENF$ — прямоугольник, то его диагонали равны. Значит, $EF = MN = 4$.

4.2. В трапеции $ABCD$ на основаниях $AD = 23$ и $BC = 13$ отмечены точки E и F соответственно так, что $ENFM$ — прямоугольник, где M и N — середины диагоналей трапеции. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 5.

4.3. В трапеции $ABCD$ на основаниях $AD = 21$ и $BC = 15$ отмечены точки E и F соответственно так, что $EMFN$ — прямоугольник, где M и N — середины диагоналей трапеции. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: 3.

5.1. (12 баллов) Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 100 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 100 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

Ответ: 199.

Решение. Если сторож попросит 199 монет, то посторонний, согласившись, отдаст ему эту сумму, но выиграет спор и получит 100 монет. Итого потеряет 99 монет. Если посторонний откажется, то проиграет спор и потеряет 100 монет, то есть для попавшегося это менее выгодно (на 1 монету). Если сторож потребует 200, то посторонний может и отказать, так как разницы в выгоде нет. Если сторож потребует больше, то постороннему выгоднее отказать ему. Сторож может потребовать меньше, но по условию требуется найти наибольшую сумму. Таким образом, ответ — 199 монет.

5.2. Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 150 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 150 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

Ответ: 299.

6.1. (12 баллов) Через сколько минут после 17:00 в следующий раз угол между часовой и минутной стрелками будет точно таким же?

Ответ: $54\frac{6}{11} \approx 54.55$.

Решение. В 17:00 угол между часовой и минутной стрелками равен $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$. Ближайший момент, когда угол будет таким же, наступит в течение ближайшего часа, после того как минутная стрелка обгонит часовую. Пусть это случилось спустя x мин. Тогда

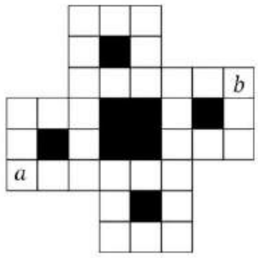
$$\left(\frac{x}{60} - \frac{5 + \frac{x}{60}}{12}\right) \cdot 360^\circ = 150^\circ,$$

откуда $x = 54\frac{6}{11}$ мин.

6.2. За сколько минут до 16:00 в предыдущий раз угол между часовой и минутной стрелками был точно таким же?

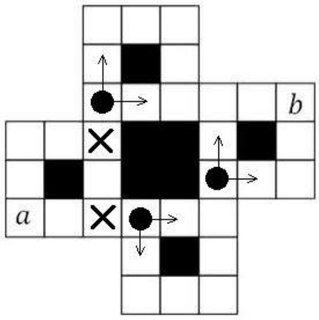
Ответ: $21\frac{9}{11} \approx 21.82$.

7.1. (12 баллов) Фишка может ходить на одну клетку вправо, вверх или вниз. Сколькими способами можно пройти от клетки a до клетки b на поле, изображённом на рисунке, минуя закрашенные клетки? (Фишка не может ходить по тем клеткам, на которых уже была.)

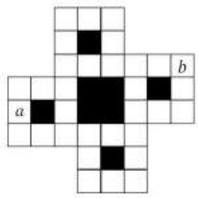


Ответ: 16.

Решение. Назовём клетку на поле *развилкой*, если далее из неё можно двигаться в двух возможных направлениях. Двигаясь от клетки a вверх или вправо, приходим к одной из развилок, отмеченных на рисунке знаком $\times$. Далее от каждой из них до клетки b мы встретим три развилки, отмеченные на рисунке знаком $\bullet$ (стрелками указаны возможные направления движения), поэтому всего способов $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

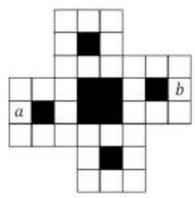


7.2. Фишка может ходить на одну клетку вправо, вниз или вверх. Сколькими способами можно пройти от клетки a до клетки b на поле, изображённом на рисунке, минуя закрашенные клетки? (Фишка не может ходить по тем клеткам, на которых уже была.)



Ответ: 16.

7.3. Фишка может ходить на одну клетку вверх, вниз или вправо. Сколькими способами можно пройти от клетки a до клетки b на поле, изображённом на рисунке, минуя закрашенные клетки? (Фишка не может ходить по тем клеткам, на которых уже была.)



Ответ: 16.

8.1. (12 баллов) Найдите наименьшее такое натуральное число, что после умножения его на 9 получается число, записанное теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

Ответ: 1089.

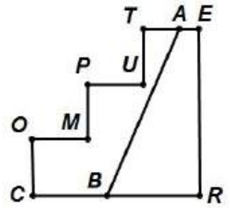
Решение. Заметим, что число должно начинаться с единицы, иначе умножение на 9 увеличит число цифр. После умножения 1 на 9 получим 9, следовательно, в первоначальном числе есть цифра 9. Число 19 не подходит, значит двузначные числа не подходят. Рассмотрим трёхзначные числа. Вторая цифра (после единицы) исходного числа не превосходит 1, иначе получаем увеличение числа цифр. Значит, таких чисел всего два: $\overline{1a9}$, где $a = 0$ или $a = 1$. Оба числа 109, 119 не удовлетворяют требованию задачи. Рассмотрим трёхзначные числа вида $\overline{1ab9}$, где $a = 0$ или $a = 1$. Среди них нужно найти наименьшее, удовлетворяющее условию задачи. Но уже при $a = 0$ получаем число 1089, это и есть ответ $(1089 \cdot 9 = 9801)$.

8.2. Найдите наименьшее такое натуральное число, кратное 9, что частное от его деления на 9 записывается теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

Ответ: 9801.

9.1. (12 баллов) В восьмиугольнике $COMPUTER$, изображённом на рисунке, все внутренние углы равны 90° или 270°, а также

$$CO = OM = MP = PU = UT = TE = \sqrt{2}.$$



Внутри отрезков TE и CR отмечены точки A и B соответственно так, что площади частей, на которые отрезок AB разбивает восьмиугольник, равны. Найдите разность периметров этих частей.

Ответ: $2\sqrt{2} \approx 2.83$.

Решение. Пусть $CO = a = \sqrt{2}$ и отрезок AB делит восьмиугольник на две равновеликие части, причём $AE = x$. Заметим, что $ER = CR = 3a$, а площадь восьмиугольника равна 6, значит, площадь трапеции $AERB$ равна $3a^2$. С другой стороны,

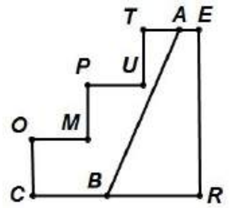
$$S_{AERB} = \frac{1}{2}\big(AE + BR\big) \cdot ER = \frac{3a}{2}\big(x + BR\big),$$

откуда $BR = 2a - x$, $BC = x + a$, $AT = a - x$. Значит,

$$P_{BCOMPUTA} - P_{AERB} = (x + a + 5a + a - x + AB) - (x + 3a + 2a - x + AB) = 2a = 2\sqrt{2} \approx 2.83.$$

9.2. В восьмиугольнике $COMPUTER$, изображённом на рисунке, все внутренние углы равны 90° или 270°, а также

$$CO = OM = MP = PU = UT = TE = \sqrt{3}.$$



Внутри отрезков TE и CR отмечены точки A и B соответственно так, что площади частей, на которые отрезок AB разбивает восьмиугольник, равны. Найдите разность периметров этих частей.

Ответ: $2\sqrt{3} \approx 3.46$.

10.1. (12 баллов) Поверхность круглого стола разбита на n одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до n ($n \geqslant 4$). За столом сидят n игроков с номерами 1, 2, …, n, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестаёт вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. После m вращений стола игрок №1 получил на 74 монеты меньше, чем игрок №4, а игрок №2 получил на 50 монет меньше, чем игрок №3. Найдите m, если известно, что игроку №4 по 3 монеты выпадало вдвое большее количество раз, чем по 2 монеты, но вдвое меньшее, чем по одной.

Ответ: 69.

Решение. Пусть игроку №3 одна монета доставалась ровно k раз, то мы получаем уравнение $(m-k)-(n-1)k = 50$. Ровно в $7k$ случаях одна монета доставалась кому-то из игроков 2, 3, 4, тогда получаем уравнение $3(m-7k)-7k(n-3) = 74$. Раскрываем скобки, приводим подобные и получаем систему из двух уравнений $m - nk = 50, 3m - 7nk = 74$. Умножаем перовое равенство на 7, вычитаем из него второе и получаем $m = 69$.

10.2. Поверхность круглого стола разбита на n одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до n ($n \geqslant 4$). За столом сидят n игроков с номерами 1, 2, …, n, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестаёт вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. После m вращений стола игрок №1 получил на 71 монету меньше, чем игрок №4, а игрок №2 получил на 40 монет меньше, чем игрок №3. Найдите m, если известно, что игроку №4 по 3 монеты выпадало втрое большее количество раз, чем по 2 монеты, но вдвое меньшее, чем по одной.

Ответ: 47.

10.3. Поверхность круглого стола разбита на n одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до n ($n \geqslant 4$). За столом сидят n игроков с номерами 1, 2, …, n, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестаёт вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. После m вращений стола игрок №1 получил на 73 монеты меньше, чем игрок №4, а игрок №2 получил на 40 монет меньше, чем игрок №3. Найдите m, если известно, что игроку №4 по 3 монеты выпадало такое же количество раз, как и по 2 монеты, но вдвое меньшее, чем по одной.

Ответ: 87.