Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. (4 балла) Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько Шуре сейчас, он был старше неё в два раза. Сколько лет Мите?

Ответ: 33.

Решение. Шура 11 лет назад была вдвое моложе, чем сейчас. Значит, ей 22 года, а Мите 33.

1.2. Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько сейчас Шуре, он был старше неё в два раза. Сколько лет Шуре?

Ответ: 22.

2.1. (5 баллов) Одна сторона прямоугольника на 20 % меньше другой, а его площадь равна $4\frac{1}{20}$. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: 2.25.

Решение. Если a — искомая сторона, то из условия задачи $0{,}8a^2 = \frac{81}{20}$, откуда $a^2 = \frac{81}{16}$, $a = \frac{9}{4}$.

2.2. Одна сторона прямоугольника на 60 % меньше другой, а его площадь равна $1\frac{9}{40}$. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: 1.75.

3.1. (13 баллов) Найдите наибольшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству $n^{300} < 3^{500}$.

Ответ: 6.

Решение. Неравенство равносильно следующему: $n^3 < 3^5 = 243$. Поскольку $6^3 = 216 < 243 < 7^3 = 289$, искомым является $n = 6$.

3.2. Найдите наименьшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству $n^{300} > 5^{200}$.

Ответ: 3.

4.1. (13 баллов) Числитель несократимой дроби возвели в куб, а знаменатель увеличили на 3. В результате дробь удвоилась. Найдите значение исходной дроби, если её числитель и знаменатель — натуральные числа.

Ответ: $\frac{2}{3} \approx 0.67$.

Решение. По условию $2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b+3}$, откуда $a^2 = \frac{2(b+3)}{b} = 2 + \frac{6}{b}$. Поэтому 6 делится на b. Если $b = 1$, 2 или 6, то $a^2 = 8$, 5 или 3 соответственно. Таких целых a не существует. Если $b = 3$, то $a = 2$. Искомая дробь: $\frac{2}{3}$.

4.2. Знаменатель несократимой дроби возвели в куб, а числитель увеличили на 2. В результате дробь стала в три раза меньше. Найдите значение исходной дроби, если её числитель и знаменатель — натуральные числа.

Ответ: $\frac{1}{3} \approx 0.33$.

5.1. (13 баллов) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 11 и запись которого содержит 5 нулей и 7 единиц. (Можно использовать признак делимости на 11: число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих в чётных разрядах, и суммой цифр, стоящих в нечётных разрядах, делится на 11.)

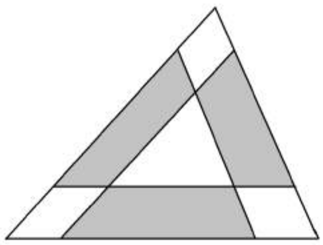
Ответ: 1000001111131.

Решение. Число 7 не делится на 2, поэтому в записи числа не может быть ровно $5 + 7 = 12$ цифр. Рассмотрим случай, когда запись содержит 13 цифр. Если «новая» цифра — это нуль, то снова получаем противоречие. Значит, «новая» цифра должна быть не меньше 1. Поэтому для получения наименьшего числа подбираем его так, чтобы эта цифра была как можно правее в записи числа. Попробуем найти искомое число в виде $100000111111x$. Приравнивая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получим уравнение $4 + x = 3$, откуда $x = 1$, что невозможно. Проверим число вида $a = 10000011111x1$. Подсчитывая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получаем $5 = 2 + x \Rightarrow x = 3$. Значит, искомое число 1000001111131.

5.2. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 11 и запись которого содержит 3 нуля и 9 единиц. (Можно использовать признак делимости на 11: число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих в чётных разрядах, и суммой цифр, стоящих в нечётных разрядах, делится на 11.)

Ответ: 1000111111131.

6.1. (13 баллов) Миша нарисовал треугольник с периметром 11 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 5, 7 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.



Ответ: 10.

Решение. Так как у параллелограммов противоположные стороны равны, то у каждой получившейся трапеции боковые стороны равны соответствующим отрезкам на сторонах исходного треугольника. Тогда получается, что сумма периметров трех трапеций равна сумме периметра исходного треугольника (сумма больших оснований и боковых сторон трех трапеций) и периметра нового треугольника (сумма меньших оснований трапеций). Значит периметр нового треугольника равен сумме периметров трапеций минус периметр исходного треугольника: $a + b + c - P$.

6.2. Миша нарисовал треугольник с периметром 13 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 7, 8 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 11.

6.3. Миша нарисовал треугольник с периметром 15 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 6, 8 и 10. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 9.

7.1. (13 баллов) У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 28.

Решение. Пусть какие-то две стрелки совпали, тогда через 30 секунд они совпадут вновь. Следовательно, стрелки в каждой такой паре совпадут ровно 2 раза за минуту. Таким образом, если n стрелок двигаются в одну сторону, а m стрелок — в другую, то $2mn = 54$, $mn = 27$. Следовательно, n может быть равно 1, 3, 9 или 27. Наибольшая сумма $m + n$ получается при $n = 1$, $m = 27$ (или наоборот) и равна 28.

7.2. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 54 раза. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 12.

7.3. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наибольшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 34.

7.4. У Юры есть необычные часы с несколькими минутными стрелками, двигающимися в разных направлениях. Юра посчитал, что за один час минутные стрелки попарно совпали ровно 66 раз. Какое наименьшее число минутных стрелок может быть на Юриных часах?

Ответ: 14.

8.1. (13 баллов) Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые будут использованы обоими игроками в такой игре.

Ответ: 3.

Решение. Опишем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала первый игрок называет простое число, заканчивающееся на 9 и отличное от 79 (например, 19). Поскольку среди чисел 90, …, 99 простым является только число 97, следующим ходом второй игрок должен назвать это число. Тогда третьим ходом первый игрок называет 79, и второй проигрывает. За меньшее число ходов первый игрок выиграть не может, так как для любой цифры от 1 до 9 существует простое число из первой сотни, которое начинается с этой цифры.

8.2. Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые этот игрок назовёт в такой игре.

Ответ: 2.

9.1. (13 баллов) Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 64.

Решение. Сумма всех девяти чисел равна 45. Обозначим через x сумму двух чисел в первой строке, а через a то единственное из девяти чисел число, которое мы не размещаем в фигуре. Тогда $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 45 - a$, откуда $4x + a = 39$. Так как a — целое число от 1 до 9, то получаем 2 возможных варианта: либо $x = 9$, $a = 3$, либо $x = 8$, $a = 7$.

Если $a = 3$, то мы должны расставить числа 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 9, 10, 11 и 12. Возможные варианты для чисел первой строки: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5$.

Если в первой строке стоят 1 и 8, то во второй строке должны стоять 4 и 6, в третьей 2 и 9, в последней 5 и 7.

Если в первой строке стоят 2 и 7, то во второй строке должны стоять 1 и 9 (при других вариантах нельзя подобрать числа для третьей строки), в третьей 5 и 6, в последней 4 и 8.

Если в первой строке стоят 4 и 5, то во второй строке могут быть 1 и 9 или 2 и 8. Но и в том, и в другом случае числа для третьей строки найти нельзя.

Если $a = 7$, то мы должны расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 8, 9, 10 и 11. Сумма чисел в первой строке равна $8 = 5+3 = 6 + 2$.

Если в первой строке стоят 3 и 5, то во второй строке должны стоять 1 и 8, в третьей 6 и 4, в последней 2 и 9.

Если в первой строке стоят 6 и 2, то во второй строке могут стоять 1 и 8 или 4 и 5. Если там стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в следующей строке. Значит, там стоят 4 и 5, тогда в следующей строке стоят 1 и 9, а в последней 3 и 8.

Таким образом, всего получилось 4 варианта расстановки чисел без учета порядка чисел в строках. Так как в каждой строке числа можно менять местами, получается по $2^4 = 16$ вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем 64 варианта.

9.2. Сколькими способами можно разместить восемь из девяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 в таблице 4×2 (4 строки, 2 столбца) так, чтобы сумма цифр в каждой строке, начиная со второй, была на 2 больше, чем в предыдущей?

Ответ: 48.