Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. (4 балла) Поднимаясь с первого на третий этаж, Петя проходит 36 ступенек. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же доме, Вася проходит 72 ступеньки. На каком этаже живёт Вася?

Ответ: 5.

Решение. С первого по третий этажи 36 ступенек — столько же, сколько с третьего по пятый.

1.2. Поднимаясь с первого на четвёртый этаж, Игорь проходит 54 ступеньки. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же доме, Никита проходит 108 ступенек. На каком этаже живёт Никита?

Ответ: 7.

2.1. (5 баллов) Отношение сторон прямоугольника равно $3:4$, а его диагональ равна 9. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

Ответ: 5.4.

Решение. Если $5x = 9$ — диагональ прямоугольника, то меньшая сторона равна $3x = \frac{27}{5} = 5.4$.

2.2. Отношение сторон прямоугольника равно $3:4$, а его диагональ равна 11. Найдите бо́льшую сторону прямоугольника.

Ответ: 8.8.

3.1. (13 баллов) У Ани есть краски синего, зелёного и красного цветов. Она хочет покрасить деревянный кубик так, чтобы после покраски у кубика было по две грани каждого цвета. Сколькими различными способами она может это сделать? Способы раскраски, получающиеся поворотом кубика, считаются одинаковыми.

Ответ: 6.

Решение. Красный напротив красного, синий напротив синего, зелёный напротив зелёного — один способ. Красный напротив красного, синий напротив зелёного — один способ и ещё два аналогичных способа. Против каждого цвета есть грань как одного, так и другого цвета из двух оставшихся — два способа. Всего 6 способов покрасить.

3.2. У Яны есть краски синего, зелёного, жёлтого и красного цветов. Она хочет покрасить деревянный кубик так, чтобы после покраски у кубика было по две грани синего и зелёного цветов и по одной грани жёлтого и красного цветов. Сколькими различными способами она может это сделать? Способы раскраски, получающиеся поворотом кубика, считаются одинаковыми.

Ответ: 8.

4.1. (13 баллов) Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 100 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 100 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

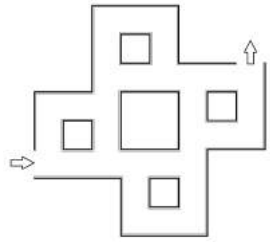
Ответ: 199.

Решение. Если сторож попросит 199 монет, то посторонний, согласившись отдать ему эту сумму, выиграет спор и получит 100 монет. Итого потеряет 99 монет. Если посторонний откажется, то проиграет спор и потеряет 100 монет, то есть для попавшегося это менее выгодно (на 1 монету). Если сторож потребует 200, то посторонний может и отказать, так как разницы в выгоде нет. Если сторож потребует больше, то постороннему выгоднее отказать ему. Сторож может потребовать меньше, но по условию требуется найти наибольшую сумму. Таким образом, ответ — 199 монет.

4.2. Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 150 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 150 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

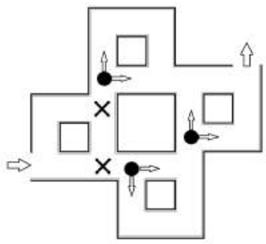
Ответ: 299.

5.1. (13 баллов) На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вниз или вверх (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?

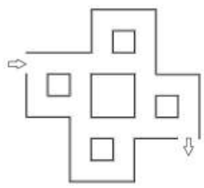


Ответ: 16.

Решение. Назовём место в лабиринте *развилкой*, если далее из него можно двигаться в двух возможных направлениях. Двигаясь после входа вверх или вправо, приходим к одной из развилок, отмеченных на рисунке знаком $\times$. От каждой из них до выхода из лабиринта мы встретим три развилки, отмеченные на рисунке знаком $\bullet$, поэтому всего путей $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

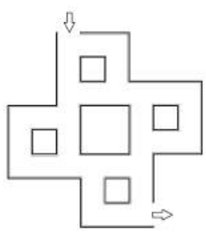


5.2. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вверх или вниз (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

5.3. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вниз, влево или вправо (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

6.1. (13 баллов) Через сколько минут после 17:00 в следующий раз угол между часовой и минутной стрелками будет точно таким же?

Ответ: $54\frac{6}{11} \approx 54.55$.

Решение. В 17:00 угол между часовой и минутной стрелками равен $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$. Ближайший момент, когда угол будет таким же, наступит в течение ближайшего часа, после того как минутная стрелка обгонит часовую. Пусть это случилось спустя x мин. Составляем уравнение: $\left(\frac{x}{60} - \frac{5+\frac{x}{60}}{12}\right) \cdot 360^\circ = 150^\circ$, откуда $x = 54\frac{6}{11}$ мин.

6.2. За сколько минут до 16:00 в предыдущий раз угол между часовой и минутной стрелками был точно таким же?

Ответ: $21\frac{9}{11} \approx 21.82$.

7.1. (13 баллов) Найдите $\dfrac{S_1}{S_2}$, где

$$S_1=\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{2^{17}}-\frac{1}{2^{16}}+\ldots+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2},\qquad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{2^{17}}-\frac{1}{2^{18}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ: -0.2.

Решение. Для суммы S_1 имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_1-\frac{1}{2^{19}}\right)-\frac{1}{2^{19}}\right)+\frac{1}{2^{19}}=S_1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}.$$

Решая это уравнение относительно S_1, получим

$$S_1=\frac{1-2^{18}}{7\cdot 2^{18}}.$$

Аналогично для суммы S_2 находим

$$2(2(2S_2-1)-1)+1=S_2-\frac{1}{2^{16}}-\frac{1}{2^{17}}+\frac{1}{2^{18}}\quad\Longrightarrow\quad S_2=\frac{5\cdot(2^{18}-1)}{7\cdot 2^{18}}.$$

Поэтому $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{-1}{5}=-0.2$.

7.2. Найдите $\dfrac{S_2}{S_1}$, где

$$S_1=\frac{1}{3^{15}}+\frac{1}{3^{14}}-\frac{1}{3^{13}}+\ldots+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3},\qquad S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{13}}+\frac{1}{3^{14}}-\frac{1}{3^{15}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ: -2.2.

8.1. (13 баллов) Найдите наименьшее такое натуральное число, что после умножения его на 9 получается число, записанное теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

Ответ: 1089.

Решение. Заметим, что число должно начинаться с единицы, иначе умножение на 9 увеличит число цифр. После умножения 1 на 9 получим 9, следовательно, в первоначальном числе есть цифра 9. Число 19 не подходит, значит двузначные числа не подходят. Рассмотрим трёхзначные числа. Вторая цифра (после единицы) исходного числа не превосходит 1, иначе получаем увеличение числа цифр. Значит, таких чисел всего два: $\overline{1a9}$, где $a=0$ или $a=1$. Оба числа 109, 119 не удовлетворяют требованию задачи. Рассмотрим трёхзначные числа вида $\overline{1ab9}$, где $a=0$ или $a=1$. Среди них нужно найти наименьшее, удовлетворяющее условию задачи. Но уже при $a=0$ получаем число 1089, это и есть ответ $(1089\cdot 9=9801)$.

8.2. Найдите наименьшее такое натуральное число, кратное 9, что частное от его деления на 9 записывается теми же цифрами, но в некотором другом порядке.

Ответ: 9801.

9.1. (13 баллов) Поверхность круглого стола разбита на 9 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 9. За столом сидят 9 игроков с номерами 1, 2, ..., 9, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 11 вращений стола игрок №4 получил 90 монет, а игрок №8 — 35 монет. Сколько монет получил игрок №1?

Ответ: 57.

Решение. Если в результате вращения стола одна монета досталась кому-то из игроков с номерами от 5 до 8, то игрок №8 получил на 5 монет меньше, чем игрок №4, а если одна монета досталась кому-то ещё, то №8 получил на 4 монеты больше, чем игрок №4. Пусть вращений, когда одна монета досталась кому-то из игроков с номерами от 5 до 8, было ровно k. Тогда получаем уравнение $-5k+4(11-k)=35-90$, из которого $k=11$. Значит, при всех 11 вращениях каждый игрок с 9 по 4 (если идти по часовой стрелке) получил ровно на 11 монет больше, чем предыдущий. Значит, у первого игрока 35+11+11=57 монет.

9.2. Поверхность круглого стола разбита на 10 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 10. За столом сидят 10 игроков с номерами 1, 2, ..., 10, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 12 вращений стола игрок №4 получил 107 монет, а игрок №8 — 35 монет. Сколько монет получил игрок №2?

Ответ: 83.

9.3. Поверхность круглого стола разбита на 10 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 10. За столом сидят 10 игроков с номерами 1,2, ..., 10, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 11 вращений стола игрок №4 получил 97 монет, а игрок №8 — 31 монету. Сколько монет получил игрок №1?

Ответ: 64.

9.4. Поверхность круглого стола разбита на 11 одинаковых секторов, в которых последовательно по часовой стрелке написаны числа от 1 до 11. За столом сидят 11 игроков с номерами 1,2, ..., 11, идущими по часовой стрелке. Стол может вращаться вокруг своей оси в обе стороны, при этом игроки остаются на месте. Игроки сидят за столом на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому, когда стол перестает вращаться, напротив каждого сектора оказывается ровно один игрок, и он получает то число монет, которое написано на этом секторе. Известно, что после 9 вращений стола игрок №4 получил 87 монет, а игрок №8 — 24 монеты. Сколько монет получил игрок №1?

Ответ: 60.