Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. (2 балла) В девятиэтажном доме на каждом этаже по 4 квартиры. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 180 квартир?

Ответ: 5.

Решение. Число подъездов равно $180 : (4 \cdot 9) = 5$.

1.2. В десятиэтажном доме на каждом этаже по 3 квартиры. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 120 квартир?

Ответ: 4.

2.1. (14 баллов) Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько Шуре сейчас, он был старше неё в два раза. Сколько лет Мите?

Ответ: 33.

Решение. Шура 11 лет назад была вдвое моложе, чем сейчас. Значит, ей 22 года, а Мите 33.

2.2. Митя старше Шуры на 11 лет. Когда Мите было столько же лет, сколько сейчас Шуре, он был старше неё в два раза. Сколько лет Шуре?

Ответ: 22.

2.3. Через 28 лет сыну будет столько же лет, сколько сейчас отцу. Сколько лет отцу, если сейчас он в пять раз старше сына?

Ответ: 35.

2.4. Через 28 лет дочери будет столько же лет, сколько сейчас отцу. Сколько лет дочери, если сейчас она в пять раз младше отца?

Ответ: 7.

3.1. (14 баллов) Представьте в виде несократимой дроби число $\dfrac{201920192019}{191719171917}$. В ответ запишите знаменатель получившейся дроби.

Ответ: 639.

Решение. Имеем

$$\frac{201920192019}{191719171917} = \frac{2019 \cdot 100010001}{1917 \cdot 100010001} = \frac{2019}{1917} = \frac{3 \cdot 673}{3 \cdot 639} = \frac{673}{639}.$$

Так как $639 = 3^2 \cdot 71$ и 673 не делится на 3 и 71, то получившаяся дробь несократима.

3.2. Представьте в виде несократимой дроби число $\dfrac{201920192019}{199219921992}$. В ответ запишите знаменатель получившейся дроби.

Ответ: 664.

3.3. Представьте в виде несократимой дроби число $\dfrac{201920192019}{200420042004}$. В ответ запишите знаменатель получившейся дроби.

Ответ: 668.

4.1. (14 баллов) Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых равна 51?

Ответ: 56.

Решение. Поскольку максимальная сумма цифр шестизначного числа равна $6 \cdot 9 = 54$, искомые числа суть 699999, 789999, 888999, а также все числа, получающиеся из них перестановкой цифр. Из цифр первого из этих чисел состоят 6 шестизначных чисел (цифра 6 может стоять на любом из 6 мест), из цифр второго — $6 \cdot 5 = 30$ чисел (6 вариантов расположения одной из цифр 7, 8, и ещё 5 для другой), из цифр третьего — $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ чисел (6 вариантов для одной цифры 8, ещё 5 вариантов для другой, 4 варианта для третьей, но поскольку эти цифры одинаковы, мы учли каждое число $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ раз). Итого $6 + 30 + 20 = 56$ чисел.

4.2. Сколько существует пятизначных чисел, сумма цифр которых равна 42?

Ответ: 35.

5.1. (14 баллов) Дедка тянул репку, а к нему последовательно присоединялись бабка, внучка, Жучка и кошка. Тянут-потянут, вытянуть не могут! Позвала кошка мышку. Тянут-потянут, вытащили репку! Известно, что каждый последующий участник тянет на четверть слабее предыдущего. Сколько следовало позвать из деревни мужиков, тянущих с той же силой, что и дедка, чтобы они вместе с дедкой и кошкой смогли вытащить репку?

Ответ: 2.

Решение. Бабка, внучка, Жучка и мышка тянут с суммарной силой, составляющей

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{2019}{1024} = 1\frac{995}{1024}$$

от силы дедки. Значит, нужно позвать двух мужиков.

5.2. Дедка тянул репку, а к нему последовательно присоединялись бабка, внучка, Жучка и кошка. Тянут-потянут, вытянуть не могут! Позвала кошка мышку. Тянут-потянут, вытащили репку! Известно, что каждый последующий участник тянет на четверть слабее предыдущего. Сколько следовало позвать из деревни мужиков, тянущих с той же силой, что и дедка, чтобы они вместе с дедкой и мышкой смогли вытащить репку?

Ответ: 3.

6.1. (14 баллов) Найдите наименьшее натуральное число, запись которого содержит 5 нулей и 7 единиц, причём сумма цифр, стоящих в чётных разрядах, равна сумме цифр, стоящих в нечётных разрядах.

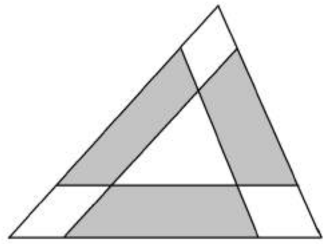
Ответ: 1000001111131.

Решение. Число 7 не делится на 2, поэтому в записи числа не может быть ровно $5 + 7 = 12$ цифр. Рассмотрим случай, когда запись содержит 13 цифр. Если «новая» цифра — это нуль, то снова получаем противоречие. Значит, «новая» цифра должна быть не меньше 1. Поэтому для получения наименьшего числа подбираем его так, чтобы эта цифра была как можно правее в записи числа. Попробуем найти искомое число в виде $100000111111x$. Приравнивая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получим уравнение $4 + x = 3$, откуда $x = 1$, что невозможно. Проверим число вида $a = 10000011111x1$. Подсчитывая суммы цифр на чётных и на нечётных местах, получаем $5 = 2 + x \Rightarrow x = 3$. Значит, искомое число 1000001111131.

6.2. Найдите наименьшее натуральное число, запись которого содержит 3 нуля и 9 единиц, причём сумма цифр, стоящих в чётных разрядах, равна сумме цифр, стоящих в нечётных разрядах.

Ответ: 1000111111131.

7.1. (14 баллов) Миша нарисовал треугольник с периметром 11 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 5, 7 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.



Ответ: 10.

Решение. Так как у параллелограммов противоположные стороны равны, то у каждой получившейся трапеции боковые стороны равны соответствующим отрезкам на сторонах исходного треугольника. Тогда получается, что сумма периметров трех трапеций равна сумме периметра исходного треугольника (сумма больших оснований и боковых сторон трех трапеций) и периметра нового треугольника (сумма меньших оснований трапеций). Значит периметр нового треугольника равен сумме периметров трапеций минус периметр исходного треугольника: $a+b+c-P$.

7.2. Миша нарисовал треугольник с периметром 13 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 7, 8 и 9. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 11.

7.3. Миша нарисовал треугольник с периметром 15 и так разрезал его на части тремя прямыми разрезами, параллельными сторонам, как показано на рисунке. Периметры трёх закрашенных фигур (трапеций) оказались равны 6, 8 и 10. Найдите периметр маленького треугольника, получившегося после разрезания.

Ответ: 9.

8.1. (14 баллов) Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые будут использованы обоими игроками в такой игре.

Ответ: 3.

Решение. Опишем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала первый игрок называет простое число, заканчивающееся на 9 и отличное от 79 (например, 19). Поскольку среди чисел 90, ..., 99 простым является только число 97, следующим ходом второй игрок должен назвать это число. Тогда третьим ходом первый игрок называет 79, и второй проигрывает. За меньшее число ходов первый игрок выиграть не может, так как для любой цифры от 1 до 9 существует простое число из первой сотни, которое начинается с этой цифры.

8.2. Двое проводят время за игрой: по очереди называют не превосходящие 100 простые числа так, чтобы последняя цифра числа, названного одним игроком, была равна первой цифре числа, которое следующим ходом называет второй (кроме самого первого простого числа, названного в игре). Повторять уже названные ранее числа нельзя. Проигрывает тот, кто не может назвать по этим правилам очередное простое число. Докажите, что один из игроков может действовать так, чтобы гарантированно обеспечить себе выигрыш, и найдите наименьшее возможное количество простых чисел, которые этот игрок назовёт в такой игре.

Ответ: 2.