Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. (2 балла) В многодетной семье у кого-то из детей 3 брата и 6 сестёр, а у кого-то — 4 брата и 5 сестёр. Сколько мальчиков в этой семье?

Ответ: 4.

Решение. У мальчиков в семье меньше братьев, чем у девочек, а у девочек меньше сестёр, чем у мальчиков. Поэтому в семье 4 мальчика и 6 девочек.

1.2. В многодетной семье у кого-то из детей 3 брата и 6 сестёр, а у кого-то — 4 брата и 5 сестёр. Сколько девочек в этой семье?

Ответ: 6.

2.1. (14 баллов) Поднимаясь с первого на третий этаж, Петя проходит 36 ступенек. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же подъезде, Вася проходит 72 ступеньки. На каком этаже живёт Вася?

Ответ: 5.

Решение. С первого по третий этажи 36 ступенек — столько же, сколько с третьего по пятый.

2.2. Поднимаясь с первого на четвёртый этаж, Игорь проходит 54 ступеньки. Поднимаясь с первого на свой этаж в этом же подъезде, Никита проходит 108 ступенек. На каком этаже живёт Никита?

Ответ: 7.

3.1. (14 баллов) Света, Катя, Оля, Маша и Таня ходят на математический кружок, в котором более 60% учащихся — мальчики. Какое наименьшее число школьников может быть в этом кружке?

Ответ: 13.

Решение. Пусть M — число мальчиков, D — число девочек в кружке. Тогда $\frac{M}{M+D} > \frac{3}{5}$, следовательно, $M > \frac{3}{2}D \geqslant \frac{15}{2}$. Минимальное возможное значение M равно 8, а минимальное возможное значение D равно 5, всего 13 детей.

3.2. Вася, Ваня, Никита, Олег и Игорь ходят на математический кружок, в котором более 70% учащихся — девочки. Какое наименьшее число школьников может быть в этом кружке?

Ответ: 17.

4.1. (14 баллов) Найдите все целые значения, которые может принимать дробь $\dfrac{8n+157}{4n+7}$ при натуральных n. В ответ запишите сумму найденных значений.

Ответ: 18.

Решение. Имеем $\frac{8n+157}{4n+7} = 2 + \frac{143}{4n+7}$. Поскольку делителями числа 143 являются только числа 1, 11, 13 и 143, целые значения дроби получаются только при $n = 1$ и $n = 34$, они равны соответственно 15 и 3, а их сумма равна 18.

4.2. Найдите все целые значения, которые может принимать дробь $\dfrac{12n+109}{3n+8}$ при натуральных n. В ответ запишите сумму найденных значений.

Ответ: 16.

5.1. (14 баллов) Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 100 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 100 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

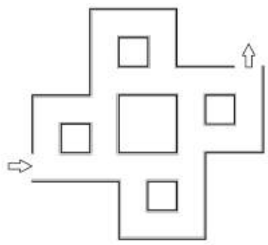
Ответ: 199.

Решение. Если сторож попросит 199 монет, то посторонний, согласившись отдать ему эту сумму, выиграет спор и получит 100 монет. Итого потеряет 99 монет. Если посторонний откажется, то проиграет спор и потеряет 100 монет, то есть для попавшегося это менее выгодно (на 1 монету). Если сторож потребует 200, то посторонний может и отказать, так как разницы в выгоде нет. Если сторож потребует больше, то постороннему выгоднее отказать ему. Сторож может потребовать меньше, но по условию требуется найти наибольшую сумму. Таким образом, ответ — 199 монет.

5.2. Сторож задержал постороннего и хочет прогнать его. Но попавшийся сказал, что заключил спор с друзьями на 150 монет, что сторож не выгонит его отсюда (если выгонит, то он платит друзьям 150 монет, иначе платят они), и, решив откупиться от сторожа, предложил ему назвать сумму. Какое наибольшее число монет может запросить сторож, чтобы посторонний, руководствуясь лишь выгодой для себя, гарантированно заплатил сторожу?

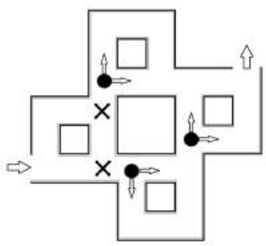
Ответ: 299.

6.1. (14 баллов) На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вниз или вверх (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?

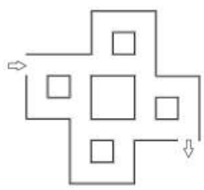


Ответ: 16.

Решение. Назовём место в лабиринте *развилкой*, если далее из него можно двигаться в двух возможных направлениях. Двигаясь после входа вверх или вправо, приходим к одной из развилок, отмеченных на рисунке знаком $\times$. От каждой из них до выхода из лабиринта мы встретим три развилки, отмеченные на рисунке знаком $\bullet$, поэтому всего путей $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

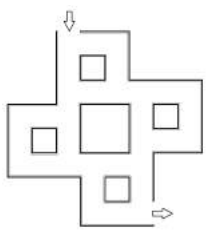


6.2. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вправо, вверх или вниз (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

6.3. На картинке стрелочками отмечены вход и выход из лабиринта. Двигаться по нему можно так, чтобы на этой картинке перемещаться только вниз, влево или вправо (разворачиваться нельзя). Сколькими различными путями можно пройти этот лабиринт?



Ответ: 16.

7.1. (14 баллов) Назовем натуральное число *улиткой*, если его запись состоит из записей трёх последовательных натуральных чисел, приписанных друг к другу в некотором порядке: например, 312 или 121413. Числа-улитки иногда бывают квадратами натуральных чисел: например, $324 = 18^2$ или $576 = 24^2$. Найдите четырёхзначное число-улитку, которое является квадратом некоторого натурального числа.

Ответ: 1089.

Решение. Заметим, что число-улитка может быть четырехзначным только в случае, если три числа, из которых получается его запись, это $8, 9, 10$ (числа $7, 8, 9$ и меньшие ещё будут образовывать трёхзначное число, а $9, 10, 11$ и бо́льшие — уже не менее чем пятизначное). Осталось разобраться с порядком выбранных чисел. Квадрат натурального числа не может оканчиваться на 10 (нулей должно быть чётное число или не должно быть вовсе). Также квадрат не может заканчиваться на цифру 8. Значит, последней должна быть цифра 9. Остаются варианты 8109 и 1089. Поскольку $8109 = 90^2 + 9$ и $1089 = 33^2$, единственное четырёхзначное число-улитка, являющееся квадратом, равно 1089.

7.2. Назовем натуральное число *улиткой*, если его запись состоит из записей трёх последовательных натуральных чисел, приписанных друг к другу в некотором порядке: например, 312 или 121413. Числа-улитки иногда бывают квадратами натуральных чисел, а иногда нет: например, $324 = 18^2$, но $567 = 24^2 - 9$). Найдите нечётное четырёхзначное число-улитку, которое **не** является квадратом никакого натурального числа.

Ответ: 8109.

8.1. (14 баллов) Таблица 1×12 заполнена числами так, что сумма чисел в любых её соседних четырёх клетках равна 11. Некоторые числа в ней стёрли, и остались только три числа:

2						1			0		$*$

Какое число стояло в таблице на месте $*$?

Ответ: 8.

Решение. Если числа x, y, z, t, w расположены в 5 соседних ячейках, то $x+y+z+t = y+z+t+w$. Отсюда $x = w$, то есть каждое число повторяется через 4 клетки. Например, число 2 будет в 1-й, 5-й и 9-й ячейках. Аналогично с другими числами. Значит, в таблица заполнена числами так:

2	0	1	$*$	2	0	1	$*$	2	0	1	$*$

По условию $2 + 0 + 1 + * = 0 + 1 + * + 2 = 1 + * + 2 + 0 = * + 2 + 0 + 1 = 11$. Значит, $* = 8$.

8.2. Таблица 1×12 заполнена числами так, что сумма чисел в любых её соседних четырёх клетках равна 12. Некоторые числа в ней стёрли, и остались только три числа:

2					0					1	$*$

Какое число стояло в таблице на месте $*$?

Ответ: 9.