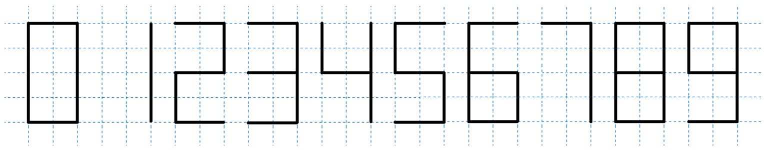
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2018/2019 учебного года для 5–6 классов

Задача 1. Для представления записей чисел используют однотипные металлические формы цифр:



Сколько «весит» число 2019, если число 1 «весит» 1 кг?

Ответ: 9,5 кг.

Решение. Числу 1 соответствует форма, которая состоит из двух «палок», вес каждой из которых равен 0,5 кг. Число 2019 состоит из четырёх форм: в двойке 5 «палок», в нуле — 6, в единице — 2, в девятке 6 «палок». Значит, оно весит $(5 + 6 + 2 + 6)/2 = 19/2 = 9{,}5$ кг.

Задача 2. У Миши есть набор из девяти карточек с буквами слова «ЛОМОНОСОВ». На оборотной стороне каждой карточки Миша написал по цифре так, что на карточках с одинаковыми буквами цифры одинаковы, а на карточках с разными буквами — различны. При этом оказалось верным равенство

$$\text{Л} + \frac{\text{О}}{\text{М}} + \text{О} + \text{Н} + \frac{\text{О}}{\text{С}} = \text{ОВ},$$

в котором обе входящие в него дроби являются правильными. Какие цифры мог написать Миша на карточках? Достаточно привести один пример.

Ответ: $8 + \dfrac{2}{3} + 2 + 9 + \dfrac{2}{6} = 20$ (можно переставить местами 8 и 9, а также 3 и 6).

Решение. Левая часть оказавшегося верным равенства меньше величины $10 + 9 + 10 = 29$, а значит, цифра, соответствующая букве «О», может оказаться либо единицей, либо двойкой. При этом должно выполняться равенство $\dfrac{\text{О}}{\text{М}} + \dfrac{\text{О}}{\text{С}} = 1$. Отсюда следует, что на карточке с буквой «О» может оказаться только цифра 2, а значит, на карточках с буквами «М» и «С» написаны (в любом порядке) цифры 3 и 6. В таком случае справедливо неравенство $\text{Л} + \text{Н} + 1 + 2 \geqslant 20$, из которого восстанавливаются значения цифр на оставшихся карточках.

Задача 3. На реке от одной пристани в противоположных направлениях в 13:00 вышли два одинаковых прогулочных катера. Одновременно с ними от пристани отчалил плот. Через час один из катеров развернулся и поплыл в обратном направлении. В 15:00 то же самое сделал и второй катер. Какова скорость течения, если в момент встречи катеров плот отошёл от пристани на 7,5 км?

Ответ: 2,5 км/ч.

Решение. Рассмотрим систему отсчёта, связанную с рекой. В этой системе катера двигаются с равными скоростями: вначале 1 час удаляются друг от друга в противоположных направлениях, затем ещё 1 час двигаются в одном направлении (при этом расстояние между ним не меняется), а затем сближаются до встречи. Поскольку на втором временном промежутке расстояние между катерами не менялось, сближаться они будут столько же, сколько удалялись, то есть 1 час. Таким образом, с момента отплытия до встречи прошло 3 часа. За это время плот проплыл (со скоростью течения) 7,5 км. Следовательно, его скорость равна 2,5 км/ч.

Задача 4. Каждую клетку таблицы 3×3 раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет, причём необязательно все три цвета использованы. Сколько существует таких раскрасок?

Ответ: 246.

Решение. Центральную клетку можно раскрасить в любой из трёх цветов, назовём этот цвет a. Каждую из четырёх клеток, имеющих общую сторону с центральной, можно раскрасить в любой из двух оставшихся цветов. Пусть клетка, расположенная над центральной, раскрашена в цвет b. Третий цвет назовём c. Рассмотрим всевозможные варианты раскраски клеток, имеющих общую сторону с центральной, и закодируем их строчками из букв b и c, которые начинаются с буквы b, а затем соответствуют цветам этих клеток, пробегаемых против часовой стрелки. Например, раскраска

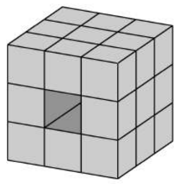
	b	
c	a	b
	c	

будет закодирована строчкой $bccb$. Рассмотрим любую угловую клетку. Если две клетки, имеющие с ней общую сторону, раскрашены в один цвет, то угловую клетку можно раскрасить двумя способами. Если же эти две клетки раскрашены в разные цвета, то угловую клетку можно раскрасить только одним способом. Составим таблицу, в которой для каждой из 8 полученных кодирующих строчек укажем число раскрасок угловых клеток.

$bbbb$	16	$bbcb$	4	$bcbb$	4	$bccb$	4
$bbbc$	4	$bbcc$	4	$bcbc$	1	$bccc$	4

Таким образом, искомое число раскрасок равно произведению числа способов раскрасить центральную клетку на число способов раскрасить клетку, расположенную над центральной, на сумму чисел построенной таблицы: $3 \cdot 2 \cdot (16 + 6 \cdot 4 + 1) = 246$.

Задача 5. Из 24 одинаковых деревянных кубиков склеили «трубу» — куб $3\times3\times3$ с убранной «сердцевиной» из трёх кубиков (см. рисунок). Можно ли в каждом квадратике на поверхности «трубы» провести диагональ так, чтобы получился замкнутый путь, который ни через одну вершину не проходит дважды?



Ответ: Нет.

Решение. Диагоналей на поверхности «трубы» столько же, сколько граней кубиков на этой поверхности: $4\cdot9+2\cdot8+12 = 64$. Несамопересекающийся замкнутый путь, проходящий по всем диагоналям, должен содержать столько же вершин. Вершин всех кубиков также 64 (четыре «слоя» по 16 вершин — задействованы все узловые точки куба $3\times3\times3$). Раскрасим их в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: у каждой вершины соседние другого цвета. Получится по 32 вершины каждого цвета. Но искомый путь может проходить только через вершины одного цвета, и поэтому может содержать не более 32 диагоналей.

Задача 6. Петя пропустил футбольный матч «Динамо»–«Шинник» и, придя утром в школу, услышал, как друзья обсуждают результаты игры. Сосед Пети по парте Вася отказался назвать счёт матча, однако согласился честно ответить на любые два вопроса Пети об игре, ответами на которые могут быть лишь слова «да» или «нет». Услышав это, три друга Пети честно сказали ему следующее.

Рома: «Если я назову общее количество забитых голов за матч, то тебе наверняка удастся узнать у Васи счёт».

Олег: «Вообще-то, даже если проигравшая команда забила бы на один гол больше, то информации об общем количестве забитых голов за матч было бы достаточно, чтобы наверняка узнать у Васи счёт».

Серёжа: «Нападающий “Шинника” сделал самую красивую голевую передачу в этом сезоне».

Сможет ли теперь Петя наверняка узнать у Васи счёт, задав лишь один вопрос?

Ответ: Да.

Решение. Из слов Романа и Олега следует, что общее количество голов в матче не превосходит двух, а также что одна из команд одержала победу. Варианты счёта: $0:1$, $1:0$, $0:2$ и $2:0$. Из слов Серёжи теперь ясно, что выиграл «Шинник», так как проигравшая команда не могла забить ни одного гола. Для восстановления счёта теперь достаточно задать один вопрос Васе. Вопрос может быть, например, таким: «В матче было забито больше одного гола?».