Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 класса с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Если число уменьшить на 1, то его квадрат уменьшится на 111. Чему равно это число?
Ответ. 56.

2. Какую часть площади круга занимает вписанный в него квадрат? Ответ дайте в процентах, округлив его до целых.
Ответ. 64.

Основное задание

1.1. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее арифметическое в 25/24 раза больше среднего геометрического. В ответе укажите наибольшее из средних арифметических для всех таких пар.
Ответ. 75.

Решение. Пусть a, b — искомые числа (не ограничивая общности, можно считать, что $a > b$) и пусть $\frac{a+b}{2} = 25x$ и $\sqrt{ab} = 24x$. Тогда $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab} = 98x$ и $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab} = 2x$. Отсюда вытекает, что $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 7(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. Таким образом, $3\sqrt{a} = 4\sqrt{b}$. Значит, $a : b = 16 : 9$. Учитывая, что a и b — двузначные числа, получаем, что сумма будет наибольшей для $a = 16 \cdot 6 = 96$, $b = 9 \cdot 6 = 54$. Их среднее арифметическое равно $\frac{96+54}{2} = 75$.

1.2. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее геометрическое в 25/24 раза меньше среднего арифметического. В ответе укажите наибольшее из средних геометрических для всех таких пар.
Ответ. 72.

2.1. В вершинах куба проставлены числа ± 1, а на его гранях — числа, равные произведению чисел, стоящих в вершинах этой грани. Найдите все возможные значения, которые может принимать сумма этих 14 чисел. В ответе укажите их произведение.
Ответ. -20160.

Решение. Очевидно, что наибольшее значение суммы равно 14. Заметим, что если поменять знак в одной из вершин, то сумма чисел, стоящих в вершинах, увеличится или уменьшится на 2. С другой стороны, поменяются знаки у трёх граней. Если их сумма была 1, -1, 3, -3, то станет -1, 1, -3, или 3, соответственно, т. е. изменится на 2 или на 6. Видно, что если сложить две суммы, то остаток от деления на 4 не меняется. Значит можно получить числа 10, 6, 2, -2, -6, -10. Число -14, очевидно, получить нельзя, поскольку для этого потребуется сделать все числа равными -1. Для остальных значений легко строятся соответствующие примеры.

3.1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех $x > 0$; $f(x)$ равна большему из чисел x и $1/x$, а $g(x)$ равна меньшему из чисел x и $1/x$. Решите уравнение $f(5x) \cdot g(8x) \cdot g(25x) = 1$. В ответе укажите решение, если оно одно, или сумму решений, если их несколько. Ответ при необходимости округлите до сотых.
Ответ. 0,09 (точное значение: 0,089).

Решение. Возможны следующие случаи:
a) $0 < 5x < 8x < 25x \leqslant 1$. Тогда $f(5x)\cdot g(8x)\cdot g(25x) = \frac{8x\cdot 25x}{5x} = 40x = 1$, откуда $x = \frac{1}{40} = 0{,}025$.
b) $0 < 5x < 8x \leqslant 1 < 25x$. Тогда $f(5x)\cdot g(8x)\cdot g(25x) = \frac{8x}{5x\cdot 25x} = \frac{8}{125x} = 1$, т. е. $x = \frac{8}{124} = 0{,}064$.
c) $0 < 5x \leqslant 1 < 8x < 25x$. Тогда $f(5x)\cdot g(8x)\cdot g(25x) = \frac{1}{5x\cdot 8x\cdot 25x} = \frac{1}{1000x^3} = 1$, откуда $x = 0{,}1$, что не удовлетворяет условию $1 < 8x$.
d) $1 < 5x < 8x < 25x$. Тогда $f(5x)\cdot g(8x)\cdot g(25x) = \frac{5x}{8x\cdot 25x} = \frac{1}{40x} = 1$, откуда $x = \frac{1}{40}$, что не удовлетворяет условию $1 < 5x$.

Итак, уравнение имеет два решения $x = 0{,}025$ и $x = 0{,}064$, сумма которых равна $0{,}089 \approx 0{,}09$.

Замечание. Точное значение 0,089 также засчитывается как верный ответ.

4.1. Сколько чисел от 1 до 1000 (включительно) не представимы в виде разности двух квадратов целых чисел?

Ответ. 250.

Решение. Заметим, что любое нечетное число $2n+1$ можно представить в виде $(n+1)^2 - n^2$. Кроме того, чётное число, кратное 4, можно представить как $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. Остаются числа вида $4n+2$. Заметим, что квадрат может давать остатки 0 или 1 при делении на 4, поэтому числа вида $4n+2$ нельзя получить как разность квадратов. Таких чисел (вида $4n+2$) ровно одно в каждой четвёрке последовательных чисел, следовательно, всего таких чисел от 1 до 1000 будет $1000/4 = 250$.

5.1. Последовательность задана соотношениями $a_1 = 1$,

$$a_{2n} = \begin{cases} a_n, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ нечётно;} \end{cases} \qquad a_{2n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ a_n, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Найдите наименьшее натуральное n, для которого $a_n = a_{2017}$.

Ответ. 5.

Решение. Указанные правила легко интерпретируются с точки зрения двоичной системы: если n оканчивается на 0 и справа приписывают 1, то и к a_n справа приписывают 1. Если n оканчивается на 1 и приписывают 0, то к a_n справа приписывают 0. В остальных случаях a_n не меняется (когда к 0 приписывают 0 или к 1 приписывают 1). Запишем в двоичной системе число 2017: $2017 = 11111100001_2$. Легко видеть, что $a_{2017} = 101_2 = 5_{10}$. Проверяя первые несколько значений, найдём $a_5 = 5$.

6.1. На координатной плоскости изображен равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках с целыми координатами. Известно, что на сторонах треугольника (включая вершины) находится ровно 2019 точек с целыми координатами. Какова наименьшая возможная длина гипотенузы треугольника при этих условиях? В ответе укажите длину гипотенузы, округлённую до ближайшего целого числа.

Ответ. 952.

Решение. Наименьшая длина гипотенузы соответствует случаю, когда расстояние между точками наименьшее, а это возможно только в случае, когда катеты идут по линиям сетки (для повёрнутого треугольника расстояние между точками будет не менее $\sqrt{2}$). Тогда каждый катет имеет длину 673, а гипотенуза равна $673\sqrt{2} \approx 952$.

7.1. В ряд выписаны натуральные числа от 1 до некоторого n. Когда одно из чисел удалили, оказалось, что среднее арифметическое оставшихся равно $40\frac{3}{4}$. Найдите число, которое удалили.

Ответ. 61.

Решение. Сумма чисел от 1 до n равна $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Пусть удалили число m, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда условие задачи можно записать в виде

$$\frac{S_n - m}{n-1} = 40\frac{3}{4}.$$

Преобразуем: $\frac{n+2}{2} - \frac{m-1}{n-1} = 40\frac{3}{4}$. Заметим, что $\frac{m-1}{n-1} \leqslant 1$, поэтому если n чётно, то $\frac{m-1}{n-1} = \frac{1}{4}$, а если нечётно, то $\frac{m-1}{n-1} = \frac{3}{4}$. В первом случае получаем $n = 80$, откуда $m - 1 = 79 \cdot \frac{1}{4}$ — не целое. Во втором случае $n = 81$, т. е. $m - 1 = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60$.