Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 9 класса с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. Сколько натуральных чисел являются делителями числа 1000000 и при этом оканчиваются не на 0?

Ответ. 13.

2. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = 8$ высота, опущенная на CD, равна 4. Найдите высоту, опущенную на AD.

Ответ. 3.

Основное задание

1.1. Как-то раз в одной компании произошёл такой разговор:

— Мы должны немедленно позвонить Мише! — воскликнул Ваня.

Однако Мишиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что последние три цифры телефонного номера — последовательные натуральные числа, — сказала Настя.

— А я припоминаю, что первые пять цифр образовывали палиндром, — отметил Антон.

— Семизначные номера никто так не запоминает, их разбивают на три группы: сначала три цифры, а потом два раза по две, и мне кажется, что трёхзначное число, получающееся при таком разбиении, делилось на 9 — заметил Никита.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —а ещё в телефоне было три подряд стоящих единицы.

— Только одно из двузначных чисел, получающееся при Никитином разбиении, было простым, — добавил Саша.

Помогите ребятам восстановить номер Мишиного телефона.

Ответ. 7111765.

Решение. Заметим, что три подряд единицы не могут стоять в начале, так как 111 не делится на 9. Значит, среди первых трёх цифр есть отличная от единицы. Если это вторая или третья цифры, то поскольку первые пять образуют палиндром, а последние три — последовательные натуральные числа, в номере не найдётся трёх единиц подряд. Следовательно, вторая, третья и четвёртая цифры — единицы, тогда первая и пятая — семёрки. Значит, первое двузначное число при никитином разбиении — 17 (простое число). Последние три цифры будут последовательными натуральными числами, если второе двузначное число равно 89 или 65. Но поскольку 89 — простое число, остаётся единственный вариант 65. Значит, искомый номер — 7111765.

1.2. Как-то раз в одной компании произошёл следующий разговор:

— Нам нужно позвонить Вовочке! — сказала Катя.

Однако Вовочкиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что число, составленное из первых двух цифр, в 3 раза больше, чем число составленное из последних двух цифр, — сказала Оля.

— А я припоминаю, что последняя цифра в два раза меньше предпоследней, — отметил Серёжа.

— Третья цифра с конца и третья цифра с начала точно одинаковые — заметил Игорь.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —и эта цифра то ли в два раза больше, то ли на два больше предпоследней.

— А ещё число, составленное из цифр телефона, делится на 9, — добавила Лена.

Помогите ребятам восстановить номер Вовочкиного телефона.

Ответ. 6347421.

2.1. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x) = ax^2 - 2ax + 1$ принимает во всех точках отрезка $[0; 2]$ значения, модуль которых не превосходит 2. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.

Ответ. 4 (искомое множество значений a: $[-1;0)\cup(0;3]$).

Решение. Чтобы функция $f(x)$ была квадратичной, необходимо, чтобы $a\neq 0$. Вершина параболы, являющейся графиком данной функции, находится в точке $(1;1-a)$. Поскольку $f(0)=f(2)=1$, условие задачи выполнено, если $|1-a|\leqslant 2$, т. е. $-1\leqslant a\leqslant 3$. Значит, искомым множеством значений a является объединение $[-1;0)\cup(0;3]$, а суммарная длина этих промежутков равна 4.

2.2. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x)=ax^2-4ax+1$ принимает во всех точках отрезка $[0;4]$ значения, модуль которых не превосходит 3. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.
Ответ. 1,5 (искомое множество значений a: $[-\frac{1}{2};0)\cup(0;1]$).

2.3. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x)=ax^2+2ax-1$ принимает во всех точках отрезка $[-2;0]$ значения, модуль которых не превосходит 3. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.
Ответ. 6 (искомое множество значений a: $[-4;0)\cup(0;2]$).

2.4. Найдите все значения a, для которых квадратичная функция $f(x)=ax^2+4ax-1$ принимает во всех точках отрезка $[-4;0]$ значения, модуль которых не превосходит 4. В ответе укажите суммарную длину промежутков, которым принадлежат найденные значения a.
Ответ. 2 (искомое множество значений a: $[-\frac{5}{4};0)\cup(0;\frac{3}{4}]$).

3.1. Найдите наибольшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2000}<1$.
Ответ. -2001.

Решение. Вынося за скобку 2^x и пользуясь формулой суммы первых членов геометрической прогрессии, приведём неравенство к виду $2^x\cdot(2^{2001}-1)<1$. При $x\geqslant -2000$ оно не выполнено. Если же $x=-2001$, то получаем $1-2^{-2001}<1$, что верно.

3.2. Найдите наименьшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2005}>2$.
Ответ. -2004.

3.3. Найдите наибольшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2017}<1$.
Ответ. -2018.

3.4. Найдите наименьшее целое решение неравенства $2^x+2^{x+1}+\ldots+2^{x+2025}>2$.
Ответ. -2024.

4.1. Будем называть натуральное число *интересным*, если все его цифры, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического двух соседних цифр. Найдите наибольшее интересное число.
Ответ. 96433469.

Решение. Пусть a_n — n-я цифра искомого числа. По условию $a_n<\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ (кроме первой и последней цифры), поэтому $a_n-a_{n+1}<a_{n-1}-a_n$, т. е. разности $b_n=a_n-a_{n+1}$ уменьшаются с ростом n. Среди них не может быть четырёх положительных, так как $1+2+3+4=10>9$. Аналогично не может быть четырёх отрицательных. Значит, максимум таких разностей может быть 7, а искомое число восьмизначное. Для того, чтобы оно было наибольшим, первая цифра должна быть равна 9, а первые разности между цифрами как можно меньше. Если разности равны последовательно 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, то получим ответ: 96433469.

5.1. Сколько треугольников с целыми сторонами имеют периметр, равный 2017? (Треугольники, отличающиеся только порядком сторон — например, 17, 1000, 1000 и 1000, 1000, 17 — считаются за один треугольник.)
Ответ. 85008.

Решение. Пусть стороны a,b,c треугольника упорядочены следующим образом: $a\leqslant b\leqslant c$. Тогда меньшая сторона a не превосходит $2017/3=672\frac{1}{3}$.

Рассмотрим случай чётных a, т. е. $a = 2k$. Тогда для $k = 1, \ldots, 252$ будет получаться по k треугольников, всего $253 \cdot 252/2 = 31878$ треугольников. Для $k = 253, \ldots, 336$ будет получаться по $1009 - 3k$ треугольников, всего $1009 \cdot (336 - 253 + 1) - 3 \cdot (336 \cdot 337/2 - 252 \cdot 253/2) = 10542$ треугольников.

Аналогично для нечётных a, $a = 2k - 1$, при $k = 1, \ldots, 252$ будет получаться по k треугольников, всего $253 \cdot 252/2 = 31878$ треугольников. Для $k = 253, \ldots, 336$ будет получаться по $1011 - 3k$ треугольников, всего $1011 \cdot (336 - 253 + 1) - 3 \cdot (336 \cdot 337/2 - 252 \cdot 253/2) = 10710$ треугольников.

Итого получаем $31878 + 10542 + 31878 + 10710 = 85008$ треугольников.

6.1. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{n!}{2} = k! + l!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n$. В ответе укажите 0, если решений нет, n, если решение одно, сумму значений n для всех решений, если решений несколько. Напомним, что решением является **тройка** (n, k, l); если решения отличаются хотя бы в одной компоненте, они считаются **разными**.

Ответ. 10 (все тройки решений (n, k, l): $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(4, 3, 3)$).

Решение. Заметим, что $k < n$ и $l < n$. Если $n > 4$, то $n! > 4 \cdot (n-1)! \geqslant 2 \cdot (k! + l!)$, поэтому таких решений нет. Если $n = 2$, то получаем $1 = k! + l!$ — нет решений; если $n = 3$, то уравнение $3 = k! + l!$ имеет два решения: $k = 1, l = 2$ и $k = 2, l = 1$; если $n = 4$, то уравнение $12 = k! + l!$ даёт ещё одно решение $k = l = 3$.

7.1. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану BM и высоту CH. Оказалось, что $BM = CH = \sqrt{3}$, при этом $\angle MBC = \angle ACH$. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ. 6.

Решение. Докажем, что треугольник ABC равносторонний, все стороны которого равны 2.

Опустим из точки M перпендикуляр MK на сторону AB. В треугольнике BMK катет KM равен половине гипотенузы MB, значит, $\angle KBM = 30^\circ$. Пусть O — точка пересечения MB и CH, тогда $\angle MOC = 60^\circ$. Обозначим $\angle MBC = \angle ACH = \alpha$, тогда $\angle HCB = 60^\circ - \alpha$, поэтому $\angle BCA = 60^\circ$. Следовательно, треугольники MOC и MCB подобны по двум углам. Из подобия получаем $MC^2 = BM \cdot OM = CH \cdot OM$. По теореме синусов $OM = MC \cdot \sin\alpha / \sin 60^\circ$. Из треугольника AHC находим $HC = 2MC \cdot \cos\alpha$. Подставляя это в формулу $MC^2 = CH \cdot OM$ и сокращая на MC^2, получим $\sin 2\alpha = \sqrt{3}/2$, откуда $\alpha = 30^\circ$. Следовательно, треугольник ABC равносторонний.