Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Какое наименьшее число конфет нужно, чтобы их можно было разделить поровну и между 6, и между 15, и между 20 детьми?

Ответ. 60.

2. Если число уменьшить на 1, то его квадрат уменьшится на 111. Чему равно это число?

Ответ. 56.

Основное задание

1.1. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.

— Да, он рыцарь, — сказал второй.

— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.

— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.

— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.

— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.

— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько рыцарей среди них на самом деле.

Ответ. 5.

Решение. Предположим, что первый житель — рыцарь. Тогда второй — тоже, а третий и четвёртый — лжецы. Если же наоборот, первый — лжец, то второй — тоже, а третий и четвёртый — рыцари. В любом случае среди первых четырёх ровно два рыцаря и два лжеца. Следовательно, утверждения пятого, шестого и седьмого жителей истинны, т. е. они рыцари.

1.2. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.

— Да, он рыцарь, — сказал второй.

— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.

— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.

— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.

— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.

— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько лжецов среди них на самом деле.

Ответ. 2.

2.1. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% белых, а 14% — подберезовиков. Сколько грибов собрал Вася?

Ответ. 950.

Решение. Чтобы 14% от числа грибов было целым числом необходимо, чтобы общее число грибов было кратно 50. Тогда последние две цифры — 00 или 50. Но если трёхзначное число оканчивается на два нуля, то сумма цифр не может быть больше 9, следовательно, последние две цифры — 50, т. е. первая цифра равна $14 - 5 - 0 = 9$.

2.2. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько белых грибов собрал Вася?

Ответ. 133.

2.3. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько подберезовиков собрал Вася?

Ответ. 76.

3.1. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее арифметическое в 25/24 раза больше среднего геометрического. В ответе укажите наибольшее из средних арифметических для всех таких пар.

Ответ. 75.

Решение. Пусть a, b — искомые числа (не ограничивая общности, можно считать, что $a > b$) и пусть $\frac{a+b}{2} = 25x$ и $\sqrt{ab} = 24x$. Тогда $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 98x$ и $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} = 2x$. Отсюда вытекает, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 7(\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Таким образом, $3\sqrt{a} = 4\sqrt{b}$. Значит, $a : b = 16 : 9$. Учитывая, что a и b — двузначные числа, получаем, что сумма будет наибольшей для $a = 16 \cdot 6 = 96$, $b = 9 \cdot 6 = 54$. Их среднее арифметическое равно $\frac{96+54}{2} = 75$.

3.2. Найдите все пары двузначных натуральных чисел, у которых среднее геометрическое в 25/24 раза меньше среднего арифметического. В ответе укажите наибольшее из средних геометрических для всех таких пар.

Ответ. 72.

4.1. В ряд были выписаны все натуральные числа от 1 до 2017 включительно. Сколько раз была написана цифра 7?

Ответ. 602.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 1 до 2000. Тогда цифра 7 может стоять на 3 месте с конца: числа вида $7**$ или $17**$ — таких чисел 200. Может стоять на 2-м: $*7*$ или $1*7*$ — таких чисел тоже 200; или последней: $**7$ или $1**7$ — таких тоже 200. Кроме того, есть ещё 2007 и 2017 — ещё две цифры 7.

5.1. В вершинах куба проставлены числа ± 1, а на его гранях — числа, равные произведению чисел, стоящих в вершинах этой грани. Найдите все возможные значения, которые может принимать сумма этих 14 чисел. В ответе укажите их произведение.

Ответ. -20160.

Решение. Очевидно, что наибольшее значение суммы равно 14. Заметим, что если поменять знак в одной из вершин, то сумма чисел, стоящих в вершинах, увеличится или уменьшится на 2. С другой стороны, поменяются знаки у трёх граней. Если их сумма была 1, -1, 3, -3, то станет -1, 1, -3, или 3, соответственно, т. е. изменится на 2 или на 6. Видно, что если сложить две суммы, то остаток от деления на 4 не меняется. Значит можно получить числа 10, 6, 2, -2, -6, -10. Число -14, очевидно, получить нельзя, поскольку для этого потребуется сделать все числа равными -1. Для остальных значений легко строятся соответствующие примеры.

6.1. Сколько чисел от 1 до 1000 (включительно) не представимы в виде разности двух квадратов целых чисел?

Ответ. 250.

Решение. Заметим, что любое нечетное число $2n+1$ можно представить в виде $(n+1)^2 - n^2$. Кроме того, чётное число, кратное 4, можно представить как $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. Остаются числа вида $4n + 2$. Заметим, что квадрат может давать остатки 0 или 1 при делении на 4, поэтому числа вида $4n+2$ нельзя получить как разность квадратов. Таких чисел (вида $4n+2$) ровно одно в каждой четвёрке последовательных чисел, следовательно, всего таких чисел от 1 до 1000 будет $1000/4 = 250$.

7.1. Последовательность задана соотношениями $a_1 = 1$,

$$a_{2n} = \begin{cases} a_n, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ нечётно}; \end{cases} \qquad a_{2n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ a_n, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Найдите наименьшее натуральное n, для которого $a_n = a_{2017}$.

Ответ. 5.

Решение. Указанные правила легко интерпретируются с точки зрения двоичной системы: если n оканчивается на 0 и справа приписывают 1, то и к a_n справа приписывают 1. Если n оканчивается на 1 и приписывают 0, то к a_n справа приписывают 0. В остальных случаях a_n не меняется (когда к 0 приписывают 0 или к 1 приписывают 1). Запишем в двоичной системе число 2017: $2017 = 11111100001_2$. Легко видеть, что $a_{2017} = 101_2 = 5_{10}$. Проверяя первые несколько значений, найдём $a_5 = 5$.