Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. После того, как Вася съел половину своих яблок и ещё одно, у него осталась треть от общего количества. Сколько яблок изначально было у Васи?

Ответ. 6.

2. Сколько натуральных чисел являются делителями числа 1000000 и при этом оканчиваются не на 0?

Ответ. 13.

Основное задание

1.1. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил пятерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 4.

Решение. Среди опрошенных жителей острова рыцарем является ровно один, так как все они дали разные, причем все возможные ответы. Тогда оставшиеся четыре — лжецы.

1.2. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил шестерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять», шестой ответил: «Шесть». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 5.

1.3. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил четверых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 3.

2.1. Как-то раз в одной компании произошёл такой разговор:

— Мы должны немедленно позвонить Мише! — воскликнул Ваня.

Однако Мишиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что последние три цифры телефонного номера — последовательные натуральные числа, — сказала Настя.

— А я припоминаю, что первые пять цифр образовывали палиндром, — отметил Антон.

— Семизначные номера никто так не запоминает, их разбивают на три группы: сначала три цифры, а потом два раза по две, и мне кажется, что трёхзначное число, получающееся при таком разбиении, делилось на 9 — заметил Никита.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —а ещё в телефоне было три подряд стоящих единицы.

— Только одно из двузначных чисел, получающееся при Никитином разбиении, было простым, — добавил Саша.

Помогите ребятам восстановить номер Мишиного телефона.

Ответ. 7111765.

Решение. Заметим, что три подряд единицы не могут стоять в начале, так как 111 не делится на 9. Значит, среди первых трёх цифр есть отличная от единицы. Если это вторая или третья цифры, то поскольку первые пять образуют палиндром, а последние три — последовательные натуральные числа, в номере не найдётся трёх единиц подряд. Следовательно, вторая, третья и четвёртая цифры — единицы, тогда первая и пятая — семёрки. Значит, первое двузначное число при никитином разбиении — 17 (простое число). Последние три цифры будут последовательными натуральными числами, если второе двузначное число равно 89 или 65. Но поскольку 89 — простое число, остаётся единственный вариант 65. Значит, искомый номер — 7111765.

2.2. Как-то раз в одной компании произошёл следующий разговор:

— Нам нужно позвонить Вовочке! — сказала Катя.

Однако Вовочкиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что число, составленное из первых двух цифр, в 3 раза больше, чем число составленное из последних двух цифр, — сказала Оля.

— А я припоминаю, что последняя цифра в два раза меньше предпоследней, — отметил Серёжа.

— Третья цифра с конца и третья цифра с начала точно одинаковые — заметил Игорь.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —и эта цифра то ли в два раза больше, то ли на два больше предпоследней.

— А ещё число, составленное из цифр телефона, делится на 9, — добавила Лена.

Помогите ребятам восстановить номер Вовочкиного телефона.

Ответ. 6347421.

3.1. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 55% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 11.

Решение. Примем длину дорожки за 55 (в некоторых единицах), а скорости пешехода и велосипедиста за $100x$ и $155x$. Тогда обгоны будут происходить через каждые $1/x$ единиц времени. За это время пешеход проходит 100 единиц, т. е. оказывается на расстоянии 10 единиц в обратную сторону от старта. Так будет происходить на каждом обгоне. В момент 11-го обгона пешеход пройдет 1100 единиц и окажется в точке старта, после чего точки обгона начнут повторяться.

3.2. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 60% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 3.

4.1. Будем называть натуральное число *интересным*, если все его цифры, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического двух соседних цифр. Найдите наибольшее интересное число.

Ответ. 96433469.

Решение. Пусть a_n — n-я цифра искомого числа. По условию $a_n < \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ (кроме первой и последней цифры), поэтому $a_n - a_{n+1} < a_{n-1} - a_n$, т. е. разности $b_n = a_n - a_{n+1}$ уменьшаются. Среди них не может быть четырёх положительных, так как $1+2+3+4 = 10 > 9$. Аналогично не может быть четырёх отрицательных. Значит, максимум таких разностей может быть 7, а искомое число восьмизначное. Для того, чтобы оно было наибольшим, первая цифра должна быть равна 9, а первые разности между цифрами как можно меньше. Если разности равны последовательно 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, то получим ответ: 96433469.

5.1. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} > 2^{2017}$.

Ответ. 17.

Решение. Значение $x = 17$, очевидно, является решением. Если же $x \leqslant 16$, то имеем

$$2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} \leqslant 2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2015} + 2^{2016} < 2^{2017},$$

так как это неравенство сводится последовательно к следующим: $2^{16}+2^{17}+\ldots+2^{2015}<2^{2017}-2^{2016}=2^{2016}$, $2^{16}+2^{17}+\ldots+2^{2014}<2^{2016}-2^{2015}=2^{2015}$, $\ldots$, $2^{16}+2^{17}<2^{19}-2^{18}=2^{18}$, $2^{16}<2^{18}-2^{17}=2^{17}$, что верно.

6.1. Сколько треугольников с целыми сторонами имеют периметр, равный 27? (Треугольники, отличающиеся только порядком сторон — например, 7, 10, 10 и 10, 10, 7 — считаются за один треугольник.)

Ответ. 19.

Решение. Упорядочим стороны по возрастанию: $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда меньшая сторона a не превосходит 9. Если $a=1$ или $a=2$, то такой треугольник один. Если $a=3$ или $a=4$, то таких по два. Если $a=5$ или $a=6$, то таких по три. Если $a=7$, то таких четыре. Если $a=8$, то таких два. Если $a=9$, то такой треугольник один. Итого получаем 19 треугольников.

7.1. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{n!}{2}=k!+l!$, где $n!=1\cdot 2\cdot\ldots n$. В ответе укажите 0, если решений нет, n, если решение одно, сумму значений n для всех решений, если решений несколько. Напомним, что решением является *тройка* (n,k,l); если решения отличаются хотя бы в одной компоненте, они считаются *разными*.

Ответ. 10 (все тройки решений (n,k,l): $(3,1,2)$, $(3,2,1)$, $(4,3,3)$).

Решение. Заметим, что $k<n$ и $l<n$. Если $n>4$, то $n!>4\cdot(n-1)!\geqslant 2\cdot(k!+l!)$, поэтому таких решений нет. Если $n=2$, то получаем $1=k!+l!$ — нет решений; если $n=3$, то уравнение $3=k!+l!$ имеет два решения: $k=1, l=2$ и $k=2, l=1$; если $n=4$, то уравнение $12=k!+l!$ даёт ещё одно решение $k=l=3$.