Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Какое наименьшее число конфет нужно, чтобы их можно было разделить поровну и между 6, и между 15, и между 20 детьми?

Ответ. 60.

2. Если число уменьшить на 1, то его квадрат уменьшится на 111. Чему равно это число?

Ответ. 56.

Основное задание

1.1. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.
— Да, он рыцарь, — сказал второй.
— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.
— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.
— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.
— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.
— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько рыцарей среди них на самом деле.

Ответ. 5.

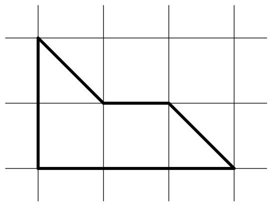
Решение. Предположим, что первый житель — рыцарь. Тогда второй — тоже, а третий и четвёртый — лжецы. Если же наоборот, первый — лжец, то второй — тоже, а третий и четвёртый — рыцари. В любом случае среди первых четырёх ровно два рыцаря и два лжеца. Следовательно, утверждения пятого, шестого и седьмого жителей истинны, т. е. они рыцари.

1.2. На острове Рыцарей и Лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды путешественник опросил семерых жителей острова.

— Я рыцарь, — сказал первый.
— Да, он рыцарь, — сказал второй.
— Среди первых двух не менее 50% лжецов, — сказал третий.
— Среди первых трёх не менее 65% лжецов, — сказал четвёртый.
— Среди первых четырёх не менее 50% рыцарей, — сказал пятый.
— Среди первых пяти не менее 40% лжецов, — сказал шестой.
— Среди первых шести не менее 65% рыцарей, — сказал седьмой.

Определите, сколько лжецов среди них на самом деле.

Ответ. 2.



2.1. Какое наименьшее число таких фигурок, что изображена на рисунке, необходимо для того, чтобы сложить из них квадрат со сторонами, лежащими на линиях сетки?

Ответ. 12.

Решение. Если принять за 1 сторону одной клетки, то площадь фигурки равна 3. Следовательно, сторона квадрата должна быть кратна 3. Перебором получаем, что квадрат 3×3 получить нельзя, а квадрат 6×6 можно сложить из шести прямоугольников 2×3, каждый из которых составлен из двух фигурок.

2.2. Какой наименьшей площади квадрат со сторонами, лежащими на линиях сетки, можно составить из таких фигурок, что изображена на рисунке? (Размер одной клетки 1×1.)

Ответ. 36.

3.1. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 20 фруктов. Мандаринов в 6 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько апельсинов у Пети?

Ответ. 6.

Решение. Если обозначить число мандаринов за m, то яблок — $6m$, а апельсинов меньше, чем $6m$. Это означает, что $13m > 20$, откуда $m \geqslant 2$. С другой стороны, общее число яблок и мандаринов не более 20, т. е. $m \leqslant 2$. Следовательно, $m = 2$, откуда получаем, что у Пети 2 мандарина и 12 яблок, а оставшиеся 6 фруктов — апельсины.

3.2. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 16 фруктов. Мандаринов в 5 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько яблок у Пети?

Ответ. 10.

3.3. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 20 фруктов. Мандаринов в 6 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько яблок у Пети?

Ответ. 12.

3.4. У Пети есть яблоки, апельсины и мандарины, всего 16 фруктов. Мандаринов в 5 раз меньше, чем яблок, а яблок больше, чем апельсинов. Сколько апельсинов у Пети?

Ответ. 4.

4.1. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% белых, а 14% — подберезовиков. Сколько грибов собрал Вася?

Ответ. 950.

Решение. Чтобы 14% от числа грибов было целым числом необходимо, чтобы общее число грибов было кратно 50. Тогда последние две цифры — 00 или 50. Но если трёхзначное число оканчивается на два нуля, то сумма цифр не может быть больше 9, следовательно, последние две цифры — 50, т. е. первая цифра равна $14 - 5 - 0 = 9$.

4.2. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько белых грибов собрал Вася?

Ответ. 133.

4.3. Вася очень любит собирать грибы. Он подсчитал, что за осень он собрал количество грибов, которое выражается трёхзначным числом, сумма цифр которого равна 14. Потом Вася подсчитал, что из собранных грибов 8% подберезовиков, а 14% — белых. Сколько подберезовиков собрал Вася?

Ответ. 76.

5.1. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 9, в которых сразу за ней идёт цифра 5?

Ответ. 279.

Решение. Для чисел вида $95{*}{*}$ последние две цифры могут быть любыми — таких чисел $10 \cdot 10 = 100$, а для чисел вида ${*}95{*}$ и ${*}{*}95$ первая цифра не может быть равна 0, значит, их по $10 \cdot 9 = 90$. При этом число 9595 было посчитано дважды, поэтому получаем 279 чисел.

5.2. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 7, в которых сразу за ней идёт цифра 4?

Ответ. 279.

5.3. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 3, в которых сразу за ней идёт цифра 8?

Ответ. 279.

5.4. Сколько существует четырёхзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 6, в которых сразу за ней идёт цифра 1?

Ответ. 279.

6.1. В ряд были выписаны все натуральные числа от 1 до 2017 включительно. Сколько раз была написана цифра 7?

Ответ. 602.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 1 до 2000. Тогда цифра 7 может стоять на 3 месте с конца: числа вида $7**$ или $17**$ — таких чисел 200. Может стоять на 2-м: $*7*$ или $1*7*$ — таких чисел тоже 200; или последней: $**7$ или $1**7$ — таких тоже 200. Кроме того, есть ещё 2007 и 2017 — ещё две цифры 7.

7.1. Сколько чисел от 1 до 1000 (включительно) не представимы в виде разности двух квадратов целых чисел?

Ответ. 250.

Решение. Заметим, что любое нечетное число $2n+1$ можно представить в виде $(n+1)^2-n^2$. Кроме того, чётное число, кратное 4, можно представить как $4n=(n+1)^2-(n-1)^2$. Остаются числа вида $4n+2$. Заметим, что квадрат может давать остатки 0 или 1 при делении на 4, поэтому числа вида $4n+2$ нельзя получить как разность квадратов. Таких чисел (вида $4n+2$) ровно одно в каждой четвёрке последовательных чисел, следовательно, всего таких чисел от 1 до 1000 будет $1000/4=250$.