Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. После того, как Вася съел половину своих яблок и ещё одно, у него осталась треть от общего количества. Сколько яблок изначально было у Васи?

Ответ. 6.

2. Сколько натуральных чисел являются делителями числа 1000000 и при этом оканчиваются не на 0?

Ответ. 13.

Основное задание

1.1. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил пятерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 4.

Решение. Среди опрошенных жителей острова рыцарем является ровно один, так как все они дали разные, причем все возможные ответы. Тогда оставшиеся четыре — лжецы.

1.2. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил шестерых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре», пятый ответил: «Пять», шестой ответил: «Шесть». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 5.

1.3. На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды турист встретил четверых жителей острова и спросил у них: «Сколько лжецов среди вас?» Первый ответил: «Один», второй ответил: «Два», третий ответил: «Три», четвёртый ответил: «Четыре». Сколько лжецов было на самом деле?

Ответ. 3.

2.1. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 47 клеток. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 23.

Решение. Если сторона исходного квадрата была равна n, а сторона полученного стала больше на k, то для его получения надо дозакрасить $(n+k)^2 - n^2 = 2nk + k^2$ клеток, т. е. $2nk + k^2 = 47$. Следовательно, k нечётно, причём $k^2 < 47$, поэтому $k \leqslant 5$. Если $k = 5$, то $10n + 25 = 47$, и n нецелое. Если $k = 3$, то $k = 3$, то $6n + 9 = 47$, и снова получается нецелое n. Если же $k = 1$, то $2n + 1 = 47$, откуда $n = 23$.

2.2. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 37 клеток. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 18.

2.3. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 43 клетки. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 21.

2.4. На клетчатой бумаге закрашен квадрат из нескольких клеток, стороны которого лежат на линиях сетки. Известно, что чтобы получить больший квадрат с таким условием, нужно дозакрасить 53 клетки. Найдите сторону исходного квадрата.

Ответ. 26.

3.1. На турнир по борьбе сумо приехало 20 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 125 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 131 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 17.

Решение. Пусть n — число сумо-тори, которые весят более 131 кг. Их суммарный вес больше, чем $131n$ кг, а суммарный вес оставшихся не меньше $90(20-n)$. Значит, $\frac{131n+90(20-n)}{20} < 125$, откуда $41n < 35 \cdot 20$, т. е. $n < \frac{700}{41} = 17\frac{3}{41}$. Наибольшее целое n с таким условием равно 17. Если 17 сумо-тори весят по $131\frac{3}{17}$ кг, а остальные 3 — по 90 кг, то условия задачи выполнены.

3.2. На турнир по борьбе сумо приехало 20 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 121 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 129 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 15.

3.3. На турнир по борьбе сумо приехало 30 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 125 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 131 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 25.

3.4. На турнир по борьбе сумо приехало 30 сумо-тори (борцов сумо). После взвешивания обнаружилось, что средний вес сумо-тори равен 121 кг. Каково наибольшее возможное количество борцов, которые весят более 129 кг, если известно, что по правилам сумо в борьбе не могут участвовать люди, весящие менее 90 кг?

Ответ. 23.

4.1. Как-то раз в одной компании произошёл такой разговор:

— Мы должны немедленно позвонить Мише! — воскликнул Ваня.

Однако Мишиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что последние три цифры телефонного номера — последовательные натуральные числа, — сказала Настя.

— А я припоминаю, что первые пять цифр образовывали палиндром, — отметил Антон.

— Семизначные номера никто так не запоминает, их разбивают на три группы: сначала три цифры, а потом два раза по две, и мне кажется, что трёхзначное число, получающееся при таком разбиении, делилось на 9 — заметил Никита.

— Точно-точно, — поддержал Митя, —а ещё в телефоне было три подряд стоящих единицы.

— Только одно из двузначных чисел, получающееся при Никитином разбиении, было простым, — добавил Саша.

Помогите ребятам восстановить номер Мишиного телефона.

Ответ. 7111765.

Решение. Заметим, что три подряд единицы не могут стоять в начале, так как 111 не делится на 9. Значит, среди первых трёх цифр есть отличная от единицы. Если это вторая или третья цифры, то поскольку первые пять образуют палиндром, а последние три — последовательные натуральные числа, в номере не найдётся трёх единиц подряд. Следовательно, вторая, третья и четвёртая цифры — единицы, тогда первая и пятая — семёрки. Значит, первое двузначное число при никитином разбиении — 17 (простое число). Последние три цифры будут последовательными натуральными числами, если второе двузначное число равно 89 или 65. Но поскольку 89 — простое число, остаётся единственный вариант 65. Значит, искомый номер — 7111765.

4.2. Как-то раз в одной компании произошёл следующий разговор:

— Нам нужно позвонить Вовочке! — сказала Катя.

Однако Вовочкиного телефонного номера никто не помнил.

— Я точно помню, что число, составленное из первых двух цифр, в 3 раза больше, чем число составленное из последних двух цифр, — сказала Оля.

— А я припоминаю, что последняя цифра в два раза меньше предпоследней, — отметил Серёжа.

— Третья цифра с конца и третья цифра с начала точно одинаковые — заметил Игорь.

— Точно-точно, — поддержал Митя, — и эта цифра то ли в два раза больше, то ли на два больше предпоследней.

— А ещё число, составленное из цифр телефона, делится на 9, — добавила Лена.

Помогите ребятам восстановить номер Вовочкиного телефона.

Ответ. 6347421.

5.1. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 55% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 11.

Решение. Примем длину дорожки за 55 (в некоторых единицах), а скорости пешехода и велосипедиста за $100x$ и $155x$. Тогда обгоны будут происходить через каждые $1/x$ единиц времени. За это время пешеход проходит 100 единиц, т. е. оказывается на расстоянии 10 единиц в обратную сторону от старта. Так будет происходить на каждом обгоне. В момент 11-го обгона пешеход пройдет 1100 единиц и окажется в точке старта, после чего точки обгона начнут повторяться.

5.2. Из одной точки круговой дорожки одновременно в одном направлении стартовали пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 60% больше скорости пешехода, и поэтому время от времени велосипедист обгоняет пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

Ответ. 3.

6.1. Будем называть натуральное число *интересным*, если все его цифры, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического двух соседних цифр. Найдите наибольшее интересное число.

Ответ. 96433469.

Решение. Пусть a_n — n-я цифра искомого числа. По условию $a_n < \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ (кроме первой и последней цифры), поэтому $a_n - a_{n+1} < a_{n-1} - a_n$, т. е. разности $b_n = a_n - a_{n+1}$ уменьшаются. Среди них не может быть четырёх положительных, так как $1+2+3+4 = 10 > 9$. Аналогично не может быть четырёх отрицательных. Значит, максимум таких разностей может быть 7, а искомое число восьмизначное. Для того, чтобы оно было наибольшим, первая цифра должна быть равна 9, а первые разности между цифрами как можно меньше. Если разности равны последовательно 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, то получим ответ: 96433469.

7.1. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} > 2^{2017}$.

Ответ. 17.

Решение. Значение $x = 17$, очевидно, является решением. Если же $x \leqslant 16$, то имеем

$$2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+2000} \leqslant 2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2015} + 2^{2016} < 2^{2017},$$

так как это неравенство сводится последовательно к следующим: $2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2015} < 2^{2017} - 2^{2016} = 2^{2016}$, $2^{16} + 2^{17} + \ldots + 2^{2014} < 2^{2016} - 2^{2015} = 2^{2015}$, …, $2^{16} + 2^{17} < 2^{19} - 2^{18} = 2^{18}$, $2^{16} < 2^{18} - 2^{17} = 2^{17}$, что верно.