Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2017/2018 учебного года для 5—6 классов

Условия заданий, решения и ответы к ним

1. На острове рыцарей и лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды пятерых жителей этого острова по очереди спросили, сколько среди них рыцарей.

— Один, — ответил первый.

— Два, — ответил второй.

— Три, — ответил третий.

— Не верьте им, они все лжецы, — сказал четвёртый.

— Сам ты лжец! — сказал пятый четвёртому.

Сколько рыцарей было на самом деле?

Ответ: 2.

Решение. Среди первых трёх не более одного рыцаря, так как они все дают разные ответы. Если рассмотреть 4-го и 5-го, то один из них рыцарь, а другой лжец. Следовательно, всего рыцарей один или два. В любом случае из первых трёх один сказал правду. Значит, рыцарей два: второй и пятый.

2. Первоклассник Петя выкладывал из имеющихся у него фишек контур равностороннего треугольника так, что каждая его сторона, включая вершины, содержит одинаковое число фишек. Затем из тех же фишек ему удалось выложить таким же образом контур квадрата. Сколько фишек у Пети, если сторона квадрата содержит на 2 фишки меньше, чем сторона треугольника?

Ответ: 24.

Решение. Пусть сторона треугольника содержит x фишек, а сторона квадрата — y фишек. Общее количество фишек, подсчитанное двумя способами, равно $3x-3=4y-4$ (учитываем, что угловые фишки считаются по два раза). Из условия задачи следует, что $y=x-2$. Поэтому получаем уравнение $3(x-1)=4(x-3)$, откуда $x=9$. Таким образом, всего фишек $3\cdot 9-3=24$.

3. Петров и Васечкин решали один и тот же арифметический пример. Некоторое число надо было разделить на 2, умножить на 7 и отнять 1001. Петров произвёл все действия правильно, а Васечкин всё перепутал: поделил на 8, возвёл в квадрат и тоже отнял 1001. Известно, что у Петрова получилось простое число. Какое число получилось у Васечкина?

Ответ: 295.

Решение. Заметим, что число 1001 делится на 7 без остатка. Значит, число, которое получил Петров, должно быть кратно 7. Но оно простое, поэтому Петров получил 7. Проведём действия Петрова в обратном порядке и получим исходное число: $\frac{7+1001}{7}\cdot 2=288$. Повторим с ним действия Васечкина: $(288:2)^2-1001=295$.

4. Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3+1=2+2=1+3=4$ и $5+4=4+5=9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

Ответ: 9 и 15.

Решение. Число 7 не может быть квадратируемым, поскольку оба числа 1 и 6 должны находиться на третьей позиции, что невозможно.

Число 9 квадратируемо, так как числа от 1 до 9 можно расставить в следующем порядке: 8, 2, 6, 5, 4, 3, 9, 1, 7, при этом требуемое условие выполнено.

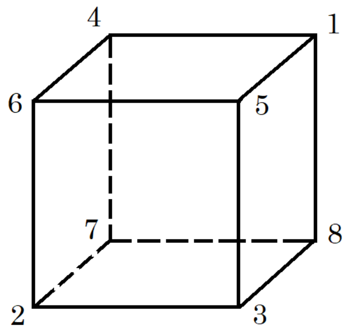
Число 11 не квадратируемо, поскольку оба числа 11 и 4 должны стоять на пятой позиции.

Число 15 квадратируемо, поскольку можно расставить числа от 1 до 15 по убыванию, и тогда $1+15=2+14=\ldots=15+1=16$.

5. Числа от 1 до 8 расставлены в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в любых трёх вершинах, находящихся в одной грани, была не менее 10. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани?

Ответ: 16.

Решение. В каждой грани есть вершина, в которой стоит число, не меньшее 6. Действительно, в противном случае одна из троек даже из оставшихся наибольших чисел 2, 3, 4, 5 даёт сумму, меньшую 10 (а именно тройка 2, 3, 4 с суммой 9).



Рассмотрим грань, содержащую вершину, в которой стоит число 6. Поскольку сумма чисел, стоящих в остальных трёх вершинах, не меньше 10, сумма всех чисел в вершинах этой грани не меньше 16.

Пример расстановки, при которой наименьшая сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани, равна 16, приведён на рисунке: сумма чисел в передней грани равна $2+3+5+6=16$.

6. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

Ответ: 6 см.

Решение. Пусть бóльшая сторона прямоугольника равна k см, $k > 5$, а сторона полученного квадрата равна n см. Тогда из равенства площадей получаем $k(k-5) = n^2$. Заметим, что $k^2-5k < k^2-4k+4 = (k-2)^2$. Кроме того, $k^2 - 5k > k^2 - 6k + 9 = (k-3)^2$ при $k > 9$. Значит, $6 \leqslant k \leqslant 9$. При $k = 6, 7, 8, 9$ получаем, что $k(k-5)$ равно соответственно $6 \cdot 1 = 6$, $7 \cdot 2 = 14$, $8 \cdot 3 = 24$, $9 \cdot 4 = 36$. Из этих значений квадратом натурального числа является только последнее, причём $n = 6$. Разрезать прямоугольник 9×4 по линиям сетки и сложить из него квадрат 6×6 можно множеством способов.

7. Все натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 125-м месте?

Ответ: 41000.

Решение. Подсчитаем количество n-значных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 5, для каждого натурального n. Вычтем из старшего разряда 1, получим число (которое может теперь начинаться с нуля), сумма цифр которого равна 4. Представим разряды этого числа в виде ячеек, в каждой из которых лежит число шаров, равное цифре, стоящей в соответствующем разряде. Разложить таким образом 4 шара по n ячейкам — это то же самое, что между 4 шарами установить $n-1$ перегородку (между некоторыми перегородками шаров может не быть вовсе). Это можно сделать $C_{n+3}^4 = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}$ способами, столько же существует искомых n-значных чисел.

При $n = 1, 2, 3, 4, 5$ получаем соответственно $C_4^4 = 1$, $C_5^4 = 5$, $C_6^4 = 15$, $C_7^4 = 35$, $C_8^4 = 70$, итого 126 чисел. На 126-м месте стоит набольшее пятизначное такое число, т. е. 50000. Значит, на 125-м месте стоит предыдущее — 41000.