Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «ЛОМОНОСОВ» по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 9 класса

1. Индиана Джонс добрался до заброшенного храма в джунглях и зашел в сокровищницу. Там стояло 5 шкатулок, причем известно, что только в одной из них клад, а остальные обрушивают каменную плиту на голову того, кто пытается их открыть. Шкатулки занумерованы слева направо. Первая, четвертая и пятая сделаны из кедра, вторая и третья - из сандалового дерева. На первой написано "Клад во мне или в 4-й шкатулке"; на второй написано "Клад в шкатулке слева от меня"; на третьей написано "Клад во мне или в крайней справа шкатулке"; на четвертой написано "В шкатулках, стоящих левее меня клада нет"; на пятой шкатулке написано "На всех остальных шкатулках написана ложь". Последний хранитель храма умирая поведал Индиане тайну: на шкатулках из кедра и из сандала написано одинаковое количество ложных утверждений. В какой шкатулке клад?

   ОТВЕТ 2.

   Решение: Последовательно рассмотрим варианты, каждый кроме второго приводит к противоречию.

2. Известно, что $x+y+z=2016$ и $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{7}{224}$. Найдите $\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}$

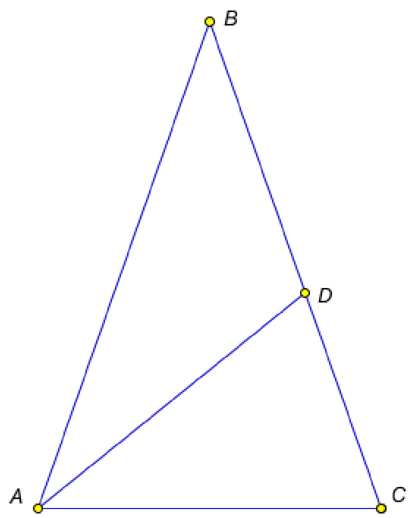
   ОТВЕТ:60.

   Решение: Прибавим по 1 к каждой дроби, получим $\frac{z}{x+y}+1+\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1=\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}=2016\cdot\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)=\frac{2016}{32}=63.$

3. Равнобедренный треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника (не обязательно равных). Найдите какие значения может принимать наименьший угол такого треугольника. В ответе укажите наименьшее из этих значений в градусах, умноженное на 6006.

   ОТВЕТ: 154440.

   Решение: Рассмотрим треугольник *ABC* с углами $\angle A=\angle C=\alpha$, $\angle B=180^o-2\alpha$. Чтобы получилось два треугольника прямая должна проходить через одну из вершин. Рассмотрим случай, когда она проходит через вершину А и делит треугольник на два: *ADB* и *ADC (см. рис.)*.



Треугольник ADC является равнобедренным в двух случаях:

I) $\angle ADC = \alpha$. Приравнивая $\angle BAD = \angle ABD$ (т.к. угол $\angle ADB$ тупой) приходим к уравнению $180^o - 2\alpha = 3\alpha - 180^o$, откуда $\alpha = 72^o$. Наименьший угол тогда равен $\angle B = 36^o$

II) $\angle ADC = \angle DAC = \frac{180^o - \alpha}{2}$. Тогда $\frac{3\alpha}{2} - 90^o = 180^o - 2\alpha$, откуда $\alpha = \frac{540^o}{7}$. В этом случае наименьший угол равен $\angle B = \frac{180^o}{7}$.

Если же прямая проходит через вершину B, то случаи рассматриваются аналогично, но там наименьший угол равен 36^o или 45^o, что больше, чем $\frac{180}{7}$.

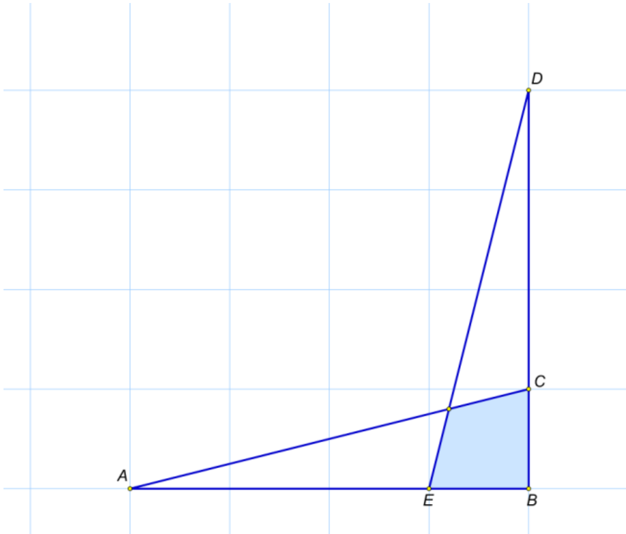
Умножая $\frac{180}{7}$ на 6006 и сокращая на 7, получим ответ.

4. Постройте на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3x+4| + |4y-3| \leq 12$. В ответе укажите площадь получившейся фигуры.
ОТВЕТ: 24.
Решение: Сдвинем координатные оси на $-\frac{4}{3}$по оси *Ox*, и на $\frac{3}{4}$ по оси *Oy*. В новых координатах полученная фигура задается неравенством |3x|+|4y|$\leq$ 12. Несложно показать, что это будет ромб с диагоналями 6 и 8, следовательно, его площадь равна 24.
5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2+y^2 = 6x+2y+15$?
ОТВЕТ:12.
Решение: Выделим полный квадрат, получим уравнение окружности $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$. Это возможно, когда одно из слагаемых равно 25 и другое 0 (4 случая), или когда одно равно 16, а другое 9 (8 случаев).
6. Найдите наибольшее десятизначное число вида $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$, обладающее следующим свойством: цифра, равная a_i встречается в его записи ровно a_{9-i} раз (например, цифра, равная a_2 встречается ровно a_7 раз).
ОТВЕТ: 8888228888.
Решение: Все цифры разобьем на пары $a_0 - a_9, \dots, a_4 - a_5$. Докажем, что цифра 9 не может присутствовать в указанном числе. Допустим, $a_i = 9$, тогда парная цифра a_{9-i} встречается 9 раз. Если $a_{9-i} \neq 9$, то 9 встречается только 1 раз, поэтому получаем число, из одной девятки и девяти единиц, но тогда две единицы стоят в одной паре, что

противоречит условию. Если же $a_{9-i} = 9$, то получим число из девяти цифр 9 и одной, не равной 9, и эта цифра образует пару с девяткой, что тоже невозможно.
Посмотрим, может ли число содержать 8. В паре с ней может быть цифра 8, значит, число содержит восемь восьмерок, образующих пары, наибольшее такое число равно 8888228888. Если же в паре не 8, то число содержит 8 цифр, которые меньше 8, т.е. не может начинаться на четыре цифры 8, следовательно, меньше, чем 8888228888.

7. На окружности отмечено 2017 различных точек $A_1, \ldots, A_{2017}$ и проведены все возможные хорды, попарно соединяющие эти точки. Через точку A_1 проведена прямая, не проходящая ни через одну из точек $A_2, \ldots, A_{2017}$. Найдите наибольшее возможное количество хорд, которые могут иметь хотя бы одну общую точку с этой прямой.
ОТВЕТ: 1018080.
Решение: Пусть по одну сторону от указанной прямой расположено k точек, тогда по другую – $2016-k$. Тогда $k(2016-k)$ хорд пересекают прямую и еще 2016 проходят через точку A_1. Заметим, что $k(2016-k) = -(k-1008)^2 + 1008^2$. Максимум этого выражения достигается при $k=1008$.

8. На клетчатой бумаге (1клетка = 1см.) изображены два равных треугольника ABC и BDE.



Найдите площадь их общей части.
ОТВЕТ: 0,8.
Решение: Введем систему координат, с началом в точке B, а в качестве осей возьмем BD и BA.Запишем уравнения прямых: AC и DE: y=4-4x и y=1/4 – 1/4x. Они пересекаются в точке с координатами (0,8; 0,8). Значит общую часть можно разбить на два одинаковых треугольника с основанием 1 и высотой 0,8. Очевидно, площадь каждого равна 0,4.