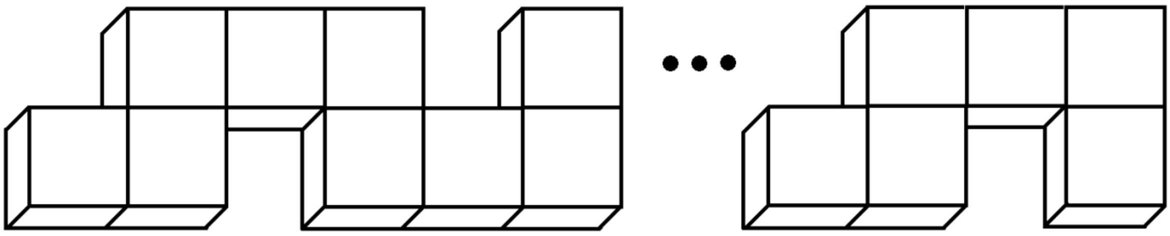
*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

# Олимпиада школьников
# «ЛОМОНОСОВ»
# по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 7-8 класса

1. Индиана Джонс добрался до заброшенного храма в джунглях и зашел в сокровищницу. Там стояло 5 шкатулок, причем известно, что только в одной из них клад, а остальные обрушивают каменную плиту на голову того, кто пытается их открыть. Шкатулки занумерованы слева направо. Первая, четвертая и пятая сделаны из кедра, вторая и третья - из сандалового дерева. На первой написано "Клад во мне или в 4-й шкатулке"; на второй написано "Клад в шкатулке слева от меня"; на третьей написано "Клад во мне или в крайней справа шкатулке"; на четвертой написано "В шкатулках, стоящих левее меня клада нет"; на пятой шкатулке написано "На всех остальных шкатулках написана ложь". Последний хранитель храма умирая поведал Индиане тайну: на шкатулках из кедра и из сандала написано одинаковое количество ложных утверждений. В какой шкатулке клад?
   **ОТВЕТ 2.**
   **Решение:** Последовательно рассмотрим варианты, каждый кроме второго приводит к противоречию.
2. На то, чтобы покрасить кубик со всех сторон уходит 60 граммов краски. Сколько краски потребуется, чтобы покрасить «змейку», составленную из 2016 таких кубиков? На рисунке показаны начало и конец змейки, а остальные кубики заменены на многоточие.

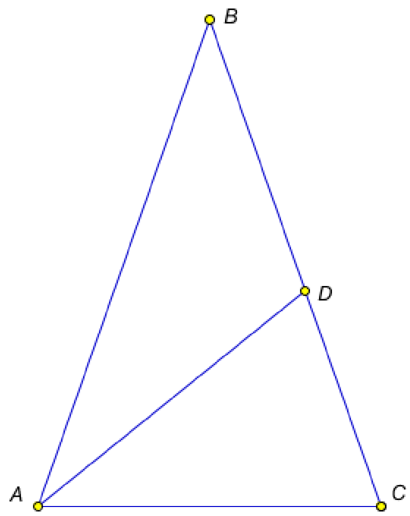


   **ОТВЕТ: 80660.**
   **Решение:** Разобьем змейку на 336 периодических фрагментов, каждый из которых содержит 6 кубиков. На покраску периодического фрагмента из 6 кубиков уходит 240 гр. краски. Получим 80640 г., учитывая, что на покраску торцов требуется еще 20 г., получим ответ.
3. Известно, что $x+y+z=2016$ и $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{7}{224}$ . Найдите $\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}$
   **ОТВЕТ:60.**
   **Решение:** Прибавим по 1 к каждой дроби, получим $\frac{z}{x+y}+1+\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1=\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}=2016\cdot\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)=\frac{2016}{32}=63.$
4. Равнобедренный треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника (не обязательно равных) . Найдите какие значения может принимать наименьший угол такого

треугольника. В ответе укажите наименьшее из этих значений в градусах, умноженное на 6006.

**ОТВЕТ: 154440.**

**Решение:** Рассмотрим треугольник *ABC* с углами $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = 180^o - 2\alpha$. Чтобы получилось два треугольника прямая должна проходить через одну из вершин. Рассмотрим случай, когда она проходит через вершину А и делит треугольник на два: *ADB* и *ADC (см. рис.)*.




Треугольник ADC является равнобедренным в двух случаях:

I) $\angle ADC = \alpha$. Приравнивая $\angle BAD = \angle ABD$ (т.к. угол $\angle ADB$ тупой) приходим к уравнению $180^o - 2\alpha = 3\alpha - 180^o$, откуда $\alpha = 72^o$. Наименьший угол тогда равен $\angle B = 36^o$

II) $\angle ADC = \angle DAC = \frac{180^o - \alpha}{2}$. Тогда $\frac{3\alpha}{2} - 90^o = 180^o - 2\alpha$, откуда $\alpha = \frac{540^o}{7}$. В этом случае наименьший угол равен $\angle B = \frac{180^o}{7}$.

Если же прямая проходит через вершину B, то случаи рассматриваются аналогично, но там наименьший угол равен 36$^o$ или 45$^o$, что больше, чем $\frac{180}{7}$.

Умножая $\frac{180}{7}$ на 6006 и сокращая на 7, получим ответ.

5. Постройте на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3x + 4| + |4y - 3| \leq 12$. В ответе укажите площадь получившейся фигуры.

**ОТВЕТ: 24.**

**Решение:** Сдвинем координатные оси на $-\frac{4}{3}$по оси *Ox*, и на $\frac{3}{4}$ по оси *Oy*. В новых координатах полученная фигура задается неравенством |3x|+|4y|$\leq 12$. Несложно показать, что это будет ромб с диагоналями 6 и 8, следовательно, его площадь равна 24.

6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2+y^2 = 6x+2y+15$ ?

**ОТВЕТ:12.**

**Решение:** Выделим полный квадрат, получим уравнение окружности $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$. Это возможно, когда одно из слагаемых равно 25 и другое 0 (4 случая), или когда одно равно 16, а другое 9 (8 случаев).

7. Найдите все натуральные числа $N$, такие, что остаток от деления 2017 на $N$ равен 17. В ответе укажите количество таких $N$.

   **ОТВЕТ 13.**

   **Решение:** В качестве N подойдут все положительные делители числа 2000, большие 17. Делители 2000 имеют вид $2^a \cdot 5^b$, где a=0,1,2,3,4 и b=0,1,2,3. Всего их будет 20 штук, но следует отбросить 1,2,4,5,8,10 и 16.

8. На окружности отмечено 2017 различных точек $A_1$, …, $A_{2017}$ и проведены все возможные хорды, попарно соединяющие эти точки. Через точку $A_1$ проведена прямая, не проходящая ни через одну из точек $A_2$, … $A_{2017}$. Найдите наибольшее возможное количество хорд, которые могут иметь хотя бы одну общую точку с этой прямой.

   **ОТВЕТ: 1018080.**

   **Решение:** Пусть по одну сторону от указанной прямой расположено $k$ точек, тогда по другую – 2016-$k$. Тогда $k$(2016-$k$) хорд пересекают прямую и еще 2016 проходят через точку $A_1$. Заметим, что $k(2016-k) = -(k-1008)^2 + 1008^2$. Максимум этого выражения достигается при $k$=1008.