Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2016/2017 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (2-й тур)

Задания для разминки

1. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x + 4$.
Ответ. -5.

2. Найдите площадь равнобокой трапеции с основаниями 2 и 8, в которую можно вписать окружность.
Ответ. 20.

Основное задание

1.1. Если 200-й день какого-то года воскресенье и 100-й день следующего за ним года — тоже воскресенье, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).
Ответ. 1.

Решение. Между 200-м днем года и 100-м днем следующего года либо $165+100=265$, либо $166+100=266$ дней. Число 266 кратно 7, число 265 — нет. Поэтому в текущем году 366 дней, то есть он високосный. Значит, предыдущий год был обычным. Поэтому между 300-м днём предыдущего года и 200-м днём текущего $65+200=265$ дней. Так как $265 = 7\cdot 37+6$, то количество дней на 1 меньше числа, кратного 7. Значит, это был понедельник.

1.2. Если 300-й день какого-то года воскресенье и 200-й день следующего за ним года — тоже воскресенье, то каким днём недели был 100-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).
Ответ. 2.

1.3. Если 200-й день какого-то года вторник и 100-й день следующего за ним года — тоже вторник, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).
Ответ. 3.

1.4. Если 300-й день какого-то года вторник и 200-й день следующего за ним года — тоже вторник, то каким днём недели был 100-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).
Ответ. 4.

1.5. Если 200-й день какого-то года четверг и 100-й день следующего за ним года — тоже четверг, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).
Ответ. 5.

1.6. Если 200-й день какого-то года пятница и 100-й день следующего за ним года — тоже пятница, то каким днём недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).
Ответ. 6.

1.7. Если 300-й день какого-то года пятница и 200-й день следующего за ним года — тоже пятница, то каким днём недели был 100-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2, и т. д.).
Ответ. 7.

2.1. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(4x^3 + x^{-3} + 2)^{2016}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?
Ответ. 4033.

Решение. В получившейся сумме будут одночлены вида $k_n x^{3n}$ для всех целых $n \in [-2016; 2016]$ с положительными коэффициентами k_n, т. е. всего $2 \cdot 2016 + 1 = 4033$ слагаемых.

2.2. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(y^2 + y^{-2} + 5)^{2017}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 4035.

2.3. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(2z^4 + 3z^{-4} + 1)^{2005}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 4011.

2.4. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(t^3 + 5t^{-3} + 3)^{1711}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 3423.

2.5. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(x^2 + 3x^{-2} + 4)^{1755}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

Ответ. 3511.

3.1. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку D и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AD и DB. Найдите площадь оставшейся фигуры, если длина лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку D перпендикулярно AB, равна 6. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

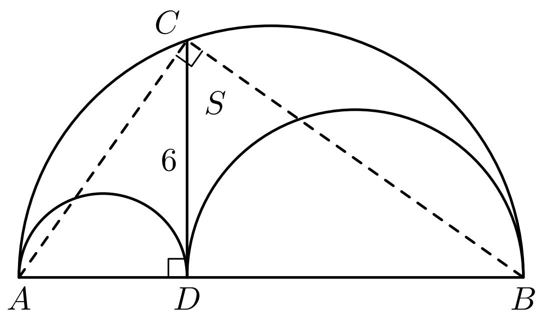
Ответ. 28,27 (точное значение: 9π).

Решение. Площадь S получившейся фигуры равна

$$S = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{8}\left(AB^2 - AD^2 - BD^2\right).$$

Так как $AB = AD + DB$, получаем, что

$$S = \frac{\pi}{4} AD \cdot BD.$$



Обозначим через C такую точку на дуге полукруга, что $DC \perp AB$. Так как $DC^2 = AD \cdot BD$, то $S = \pi\left(\dfrac{DC}{2}\right)^2$. По условию $DC = 6$, следовательно $S = 9\pi \approx 28{,}27$.

3.2. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку C и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AC и CB. Найдите площадь оставшейся фигуры, если длина лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку C перпендикулярно AB, равна 8. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 50,27 (точное значение: 16π).

3.3. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку M и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AM и MB. Найдите площадь оставшейся фигуры, если длина лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку M перпендикулярно AB, равна $2\sqrt{7}$. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 21,99 (точное значение: 7π).

3.4. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку D и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AD и DB. Площадь оставшейся фигуры оказалась равна 8π. Найдите длину лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку D перпендикулярно AB. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 5,66 (точное значение: $4\sqrt{2}$).

3.5. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку C и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AC и CB. Площадь оставшейся фигуры оказалась равна 10π. Найдите длину лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку C перпендикулярно AB. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 6,32 (точное значение: $2\sqrt{10}$).

3.6. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку M и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AM и MB. Площадь оставшейся фигуры оказалась равна $16\pi^3$. Найдите длину лежащей внутри неё части хорды, проходящей через точку M перпендикулярно AB. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 25,13 (точное значение: 8π).

4.1. Функция f удовлетворяет равенству $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$ для каждого значения x, не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2016}{2017}\right)$.

Ответ. 2017.

Решение. Подставим в равенство $\frac{1}{x}$ вместо x. Вместе с исходным равенством получим систему из двух линейных уравнений относительно $f(x)$ и $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{cases} (x-1)f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x-1}, \\ \left(\dfrac{1}{x}-1\right)f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{x}{1-x}. \end{cases}$$

Вычитая из второго равенства первое, умноженное на $\frac{1-x}{x}$, находим $\left(1+\frac{(1-x)^2}{x}\right)f(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}$, откуда $\frac{x^2-x+1}{x}f(x)=\frac{x^2-x+1}{x(1-x)}$, или $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Следовательно, $f\left(\frac{2016}{2017}\right)=2017$.

4.2. Функция f удовлетворяет равенству $(1-x)f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}$ для каждого значения x, не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2017}{2016}\right)$.

Ответ. -2016.

4.3. Функция f удовлетворяет равенству $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1-x}{x}f(x)=\frac{x}{1-x}$ для каждого значения x, не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2017}{2018}\right)$.

Ответ. -2017.

4.4. Функция f удовлетворяет равенству $f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x-1}{x}f(x)=-\frac{x}{x-1}$ для каждого значения x, не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2018}{2017}\right)$.

Ответ. 2018.

4.5. Функция g удовлетворяет равенству $(1+x)g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x}$ для каждого значения x, не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2015}{2016}\right)$.

Ответ. 2016.

4.6. Функция g удовлетворяет равенству $g\left(\frac{1}{x}\right)-(x+1)g(x)=-\frac{1}{x+1}$ для каждого значения x, не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2016}{2015}\right)$.

Ответ. -2015.

4.7. Функция g удовлетворяет равенству $g\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1+x}{x}g(x)=-\frac{x}{1+x}$ для каждого значения x, не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2014}{2015}\right)$.

Ответ. -2014.

4.8. Функция g удовлетворяет равенству $\frac{x+1}{x}g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}$ для каждого значения x, не равного 0 и -1. Найдите $g\left(-\frac{2019}{2018}\right)$.

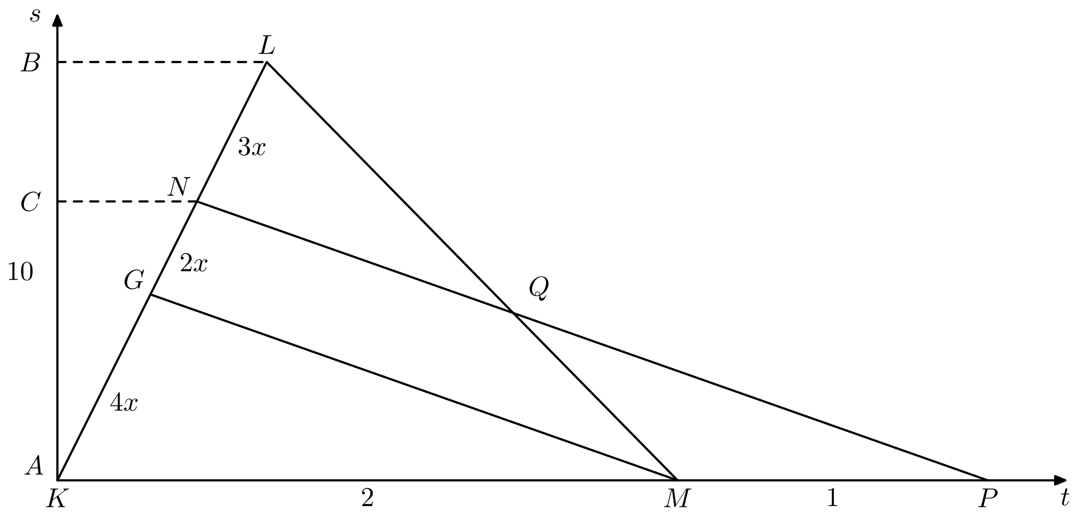
Ответ. 2019.

5.1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 10 км, в 7:00 выехал автомобиль. Проехав $2/3$ пути, автомобиль миновал пункт C, из которого в этот момент в пункт

A выехал велосипедист. Как только автомобиль прибыл в B, оттуда в обратном направлении сразу же выехал автобус и прибыл в A в 9:00. В скольких километрах от B автобус догнал велосипедиста, если велосипедист прибыл в пункт A в 10:00 и скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 6.

Решение. Изобразим графики движения автомобиля (отрезок KL), автобуса (отрезок LM) и велосипедиста (отрезок NP) в осях $(t; s)$, где t — время (в часах), s — расстояние (в километрах) от пункта A. Пусть Q — точка пересечения LM и NP. По условию $MK = 2$ и $PM = 1$. Проведём $MG \parallel NQ$, $G \in KL$, тогда по теореме Фалеса $\dfrac{NG}{GK} = \dfrac{PM}{MK} = \dfrac{1}{2}$. Значит, если $NG = 2x$, то $GK = 4x$, а $LN = 3x$. Откуда (опять по теореме Фалеса) $\dfrac{LQ}{QM} = \dfrac{LN}{NG} = \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$. Поэтому искомое расстояние равно $\dfrac{3}{5} \cdot 10 = 6$ км.



Участники, знакомые с теоремой Менелая, могут решить задачу так. Точки N, Q и P лежат на одной прямой, поэтому $\dfrac{KN}{NL} \cdot \dfrac{LQ}{QM} \cdot \dfrac{MP}{PK} = 1$, или $\dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{LQ}{QM} \cdot \dfrac{1}{3} = 1$. Значит, $\dfrac{LQ}{QM} = \dfrac{3}{2}$.

5.2. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 20 км, в 10:00 выехал автомобиль. Проехав $2/3$ пути, автомобиль миновал пункт C, из которого в этот момент в пункт A выехал велосипедист. Как только автомобиль прибыл в B, оттуда в обратном направлении сразу же выехал автобус, который догнал велосипедиста на расстоянии 12 км от B и прибыл в A в 12:00. На сколько минут позже автобуса в пункт A прибыл велосипедист, если скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 60.

5.3. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 7 км, в 11:00 выехал велосипедист. Проехав $2/5$ пути, велосипедист миновал пункт C, из которого в этот момент в пункт A вышел пешеход. Как только велосипедист прибыл в B, оттуда в обратном направлении сразу же выехал мотоциклист и прибыл в A в 12:00. В скольких километрах от B мотоциклист догнал пешехода, если пешеход прибыл в A в 13:30 и скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 5.

5.4. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 14 км, в 12:00 выехал велосипедист. Проехав $2/5$ пути, велосипедист миновал пункт C, из которого в этот момент в пункт A вышел пешеход. Как только велосипедист прибыл в B, оттуда в обратном направлении сразу же выехал мотоциклист, который догнал пешехода на расстоянии 4 км от A и прибыл в A в 13:00. На сколько минут позже мотоциклиста в A прибыл пешеход, если скорость каждого участника движения постоянна?

Ответ. 90.

6.1. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-3; 13]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{12}\right)\left(1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{12}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)\leqslant 16.$$

Ответ. 28.

Решение. Обозначим $t=\dfrac{\pi x}{12}$, тогда неравенство принимает вид

$$\left(1-\operatorname{ctg}^2 t\right)\left(1-3\operatorname{ctg}^2 t\right)\left(1-\operatorname{tg}2t\cdot\operatorname{ctg}3t\right)\leqslant 16.$$

Так как

$$1-\operatorname{ctg}^2 t=-\frac{\cos 2t}{\sin^2 t},\qquad 1-3\operatorname{ctg}^2 t=\frac{\sin^2 t-3\cos^2 t}{\sin^2 t}=\frac{4\sin^2 t-3}{\sin^2 t}=-\frac{\sin 3t}{\sin^3 t},$$

$$1-\operatorname{tg}2t\cdot\operatorname{ctg}3t=1-\frac{\sin 2t\cdot\cos 3t}{\cos 2t\cdot\sin 3t}=\frac{\sin t}{\cos 2t\cdot\sin 3t},$$

то неравенство приводится к виду $\dfrac{1}{\sin^4 t}\leqslant 16$, то есть $|\sin t|\geqslant\frac12$. Поэтому $t\in\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. Необходимо ещё учесть условия $\sin t\neq 0$, $\cos 2t\neq 0$, $\sin 3t\neq 0$. Получаем, что из полученного решения нужно вырезать точки $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ и $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Таким образом, $x\in[2+12n;10+12n]$, $x\neq 3+6n$, $x\neq\pm4+12n$. В отрезок $[-3;13]$ попадают числа -2, 2, 5, 6, 7, 10. Их сумма равна 28.

6.2. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-11; 5]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{12}\right)\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{12}\right)\left(1-\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\right)\leqslant 16.$$

Ответ. -23.

6.3. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-19; 10]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{24}\right)\left(1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{24}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{12}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{8}\right)\leqslant 4.$$

Ответ. -82.

6.4. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-7; 18]$, удовлетворяющих неравенству

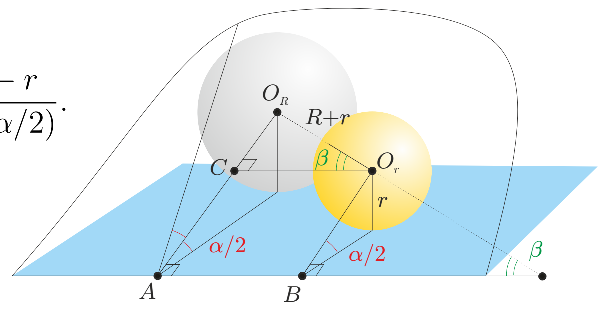
$$\left(1-3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{24}\right)\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{24}\right)\left(1-\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{8}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{12}\right)\leqslant 4.$$

Ответ. 101.

7.1. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 2 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 45° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,56 (точное значение: $\frac59$).

Решение. Обозначим искомую величину двугранного угла через α. Пусть R и r — радиусы, а O_R и O_r — центры большего и меньшего шаров соответственно, A и B — основания перпендикуляров, проведённых из O_R и O_r к ребру двугранного угла, β — угол между ребром двугранного угла и O_RO_r, $R=kr$. Тогда (см. рис.)



$$O_RA=\frac{R}{\sin(\alpha/2)},\quad O_rB=\frac{r}{\sin(\alpha/2)}\quad\Rightarrow\quad CO_R=\frac{R-r}{\sin(\alpha/2)}.$$

Из прямоугольного треугольника O_RO_rC находим

$$\sin\beta=\frac{CO_R}{O_RO_r}=\frac{R-r}{(R+r)\sin(\alpha/2)}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$

Отсюда $\alpha = 2\arcsin\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{\sin\beta}\right)$, $\cos\alpha = 1 - 2\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{\sin\beta}\right)^2$. При $k=2$, $\beta = 45^\circ$ получаем $\cos\alpha = \frac{5}{9}$.

7.2. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 3 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 60° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,33 (точное значение: $\frac{1}{3}$).

7.3. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 4 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 60° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,04 (это значение точное).

7.4. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 2 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 30° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,11 (точное значение: $\frac{1}{9}$).

7.5. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 1,5 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 30° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,68 (это значение точное).

7.6. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 1,5 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол 45° с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,84 (это значение точное).

8.1. Вычислите $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,9.

Решение. Поскольку

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n(n+1-n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

получаем, что число из условия задачи равно

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

8.2. Вычислите $\dfrac{1}{5\sqrt{4}+4\sqrt{5}} + \dfrac{1}{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}} + \dfrac{1}{7\sqrt{6}+6\sqrt{7}} + \ldots + \dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,4.

8.3. Вычислите $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{400\sqrt{399}+399\sqrt{400}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,95.

8.4. Вычислите $\dfrac{1}{5\sqrt{4}+4\sqrt{5}} + \dfrac{1}{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}} + \dfrac{1}{7\sqrt{6}+6\sqrt{7}} + \ldots + \dfrac{1}{400\sqrt{399}+399\sqrt{400}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 0,45.

8.5. Вычислите $\dfrac{1}{2\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}-\dfrac{1}{5\sqrt{4}-4\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 1,1.

8.6. Вычислите $\dfrac{1}{2\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}-\dfrac{1}{5\sqrt{4}-4\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{400\sqrt{399}-399\sqrt{400}}$. Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 1,05.

9.1. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого в десятичной записи n вместе с n^2 используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 567.

Решение. Если $n \geqslant 1000$, то $n^2 \geqslant 10^6$, тогда десятичные записи n и n^2 содержат вместе не менее 11 цифр. Если же $n \leqslant 316$, то $n^2 \leqslant 99856$, и десятичные записи n и n^2 содержат вместе не более 8 цифр. Следовательно, $317 \leqslant n \leqslant 999$.

Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45 и делится на 9, поэтому $n+n^2$ также делится на 9. Поскольку $n+n^2=n(n+1)$ есть произведение двух взаимно простых чисел, оно делится на 9 только в двух случаях: 1) n делится на 9; 2) $n+1$ делится на 9, т. е. n имеет остаток 8 при делении на 9.

Первые такие числа, бóльшие 316, равны 323 и 324. Значит, искомые числа лежат в арифметических прогрессиях $323+9k$ и $324+9k$, $k \in \mathbb{N}$. При этом в записи числа n не должно быть одинаковых цифр и цифры 0, и оно не может заканчиваться на 1, 5 и 6 (иначе его квадрат оканчивается на ту же цифру). Кроме того, если n содержит цифру 4 и заканчивается на 2 или 8, то оно также не подходит, так как тогда n^2 заканчивается на 4. С учётом этого будем выписывать последовательно оставшиеся возможные варианты $n \geqslant 317$ в таблицу:

n	n^2
324	104976
359	128881
368	135424
369	136161

n	n^2
378	142884
387	149769
413	170569
423	178929

n	n^2
459	210681
467	218089
512	262144
513	263169

n	n^2
539	290521
549	301401
567	321489
...	...

Среди проверенных чисел первым, удовлетворяющим условию задачи, оказывается число 567. Аналогично, перебирая возможные значения $n \leqslant 999$ «с конца», можно найти наибольшее из таких чисел, а именно 854 (при этом перебор можно сократить, замечая, что при $n \geqslant 953$ запись числа $n^2 \geqslant 908209$ также содержит цифру 9).

9.2. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого в десятичной записи n вместе с n^2 используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 854.

9.3. Найдите наименьшее число n, которое является квадратом натурального числа и для которого в десятичной записи n вместе с $\sqrt{n}$ используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 321489.

9.4. Найдите наибольшее число n, которое является квадратом натурального числа и для которого в десятичной записи n вместе с $\sqrt{n}$ используются все цифры от 1 до 9 **ровно** по одному разу.

Ответ. 729316.

10.1. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{50}{2x+2}+\max\left(\frac{20}{x}, \frac{30}{x+2}\right) \leqslant 10.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.

Пример требуемой задачи. Две бригады проводят ремонт офисного помещения, состоящего из трёх кабинетов: 1-й площадью 50 м^2, 2-й площадью 30 м^2 и 3-й площадью 20 м^2. Производительность второй бригады выше на 2 м^2/ч, чем у первой. Первый кабинет они отремонтировали вместе, а затем разделились: первая бригада ремонтировала только 3-й кабинет, а вторая — только 2-й. Какова должна быть минимальная производительность первой бригады, чтобы вся работа была выполнена не более чем за 10 часов?

Краткое решение. Пусть x — производительность первой бригады (в м^2/ч), тогда $x+2$ — производительность второй бригады, а $2x+2$ — их производительность при совместной работе. Из условия задачи получаем требуемое в задании неравенство. Его нужно решить на множестве положительных значений x. Если $0 < x \leqslant 4$, то придём к неравенству $2x^2 - 7x - 4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1/2] \cup [4; +\infty)$. Если $x \geqslant 4$, то получим неравенство $2x^2 - 5x - 12 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -3/2] \cup [4; +\infty)$.

Таким образом, окончательно получаем $x \in [4; +\infty)$.

Ответ: 4 м^2/ч.

10.2. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{40}{2x+6} + \max\left(\frac{20}{x}, \frac{40}{x+6}\right) \leqslant 14.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.

10.3. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{18}{2x+1} + \max\left(\frac{16}{x}, \frac{20}{x+1}\right) \leqslant 6.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.

10.4. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{36}{2x+3} + \max\left(\frac{12}{x}, \frac{21}{x+3}\right) \leqslant 8.$$

Напишите условие задачи, её решение и ответ.