Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2016/2017 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. Найдите сумму квадратов корней уравнения $2^{x^2} = 4^{2-x}$.
Ответ. 12.

2. В прямоугольном треугольнике с катетом 2 и гипотенузой 4 найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из прямого угла. Ответ укажите в градусах.
Ответ. 15.

Основное задание

1.1. Проезд в Москве по карте «Тройка» в 2016 году стоит 32 рубля за одну поездку на метро и 31 рубль за одну поездку на наземном транспорте. Какое наименьшее суммарное число поездок можно совершить по этим тарифам, потратив **ровно** 5000 рублей?
Ответ. 157.

Решение. Если x — число поездок на наземном транспорте, а y — на метро, то получаем $31x + 32y = 5000$, откуда $32(x + y) = 5000 + x \geqslant 5000$. Следовательно, $x + y \geqslant 5000/32 = 156\frac{1}{4}$. Наименьшее целое значение $x + y$ равно 157, оно достигается при $x = 24$, $y = 133$.

1.2. Проезд в Москве по карте «Тройка» в 2015 году стоил 30 рублей за одну поездку на метро и 29 рублей за одну поездку на наземном транспорте. Какое наименьшее суммарное число поездок можно было совершить по этим тарифам, потратив **ровно** 4300 рублей?
Ответ. 144.

1.3. Проезд в Москве по карте «Тройка» в 2014 году стоил 28 рублей за одну поездку на метро и 26 рублей за одну поездку на наземном транспорте. Какое наименьшее суммарное число поездок можно было совершить по этим тарифам, потратив **ровно** 3800 рублей?
Ответ. 136.

1.4. Проезд в московском метро по карте «Тройка» в 2015 году стоил 30 рублей за одну поездку, а с 1 января 2016 года подорожал на 2 рубля. Какое наименьшее число поездок в метро можно было совершить по этим тарифам суммарно в 2015 и 2016 годах, потратив на это **ровно** 4700 рублей?
Ответ. 147.

1.5. Проезд в Москве на наземном транспорте по карте «Тройка» в 2015 году стоил 29 рублей за одну поездку, а с 1 января 2016 года подорожал на 2 рубля. Какое наименьшее число поездок на наземном транспорте можно было совершить по этим тарифам суммарно в 2015 и 2016 годах, потратив на это **ровно** 3700 рублей?
Ответ. 120.

2.1. Определите количество кратных трём натуральных делителей числа $11! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10\cdot 11$.
Ответ. 432.

Решение. Разложение данного числа на простые множители имеет вид $11! = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$. Все кратные трём делители этого числа имеют вид $2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta\cdot 11^\varphi$, где $\alpha\in[0;8]$, $\beta\in[1;4]$, $\gamma\in[0;2]$, $\delta\in[0;1]$, $\varphi\in[0;1]$. Общее количество таких делителей равно $(8+1)\cdot 4\cdot(2+1)(1+1)(1+1) = 432$.

2.2. Определите количество чётных натуральных делителей числа $12! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 11\cdot 12$.
Ответ. 720.

2.3. Определите количество кратных трём натуральных делителей числа $10! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 9\cdot 10$.
Ответ. 216.

2.4. Определите количество чётных натуральных делителей числа $13! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 12\cdot 13$.
Ответ. 1440.

3.1. Найдите все корни уравнения $\sin(\pi\cos 2x) = \cos(\pi\sin^2 x)$, лежащие на отрезке $[-\frac{5\pi}{3}; -\frac{5\pi}{6}]$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. $-6{,}25$.

Решение. Пусть $t = \pi\sin^2 x$. Тогда $\pi\cos 2x = \pi - 2t$, поэтому уравнение принимает вид

$$\sin(\pi - 2t) = \cos t \quad\Leftrightarrow\quad \sin 2t = \cos t \quad\Leftrightarrow\quad (2\sin t - 1)\cos t = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ t = (-1)^l\dfrac{\pi}{6} + \pi l, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Так как $0 \leqslant t \leqslant \pi$, эти равенства возможны только при $k = 0$, $l = 0$ и $l = 1$. Следовательно, $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ или $\frac{5}{6}$. Учитывая, что $\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$, получаем решение исходного уравнения: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\pi m}{2}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{\pi}{6} (= \arcsin\frac{1}{2})$, на отрезок $[-\frac{5\pi}{3}; -\frac{5\pi}{6}]$ попадают 5 корней $-\pi \pm \alpha$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, сумма которых равна $-\frac{25\pi}{4}$.

3.2. Найдите все корни уравнения $\cos(\pi\sin^2 x) = \sin(\pi\cos 2x)$, принадлежащие интервалу $(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3})$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. $-8{,}75$.

3.3. Найдите все корни уравнения $\sin(\pi\cos 2x) + \cos(\pi\cos^2 x) = 0$, принадлежащие интервалу $(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{3})$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

Ответ. $-3{,}75$.

3.4. Найдите все корни уравнения $\cos(\pi\cos^2 x) + \sin(\pi\cos 2x) = 0$, лежащие на отрезке $[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}]$. В ответ запишите делённую на π сумму этих корней (в радианах), округлив её при необходимости до двух знаков после запятой.

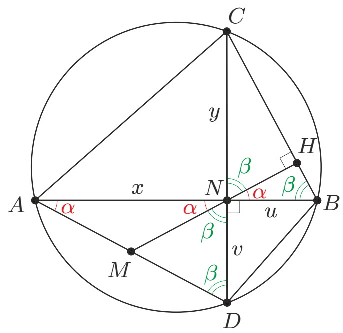
Ответ. $-5{,}25$.

4.1. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Определите расстояние между серединой отрезка AD и прямой BC, если $AC = 6$, $BC = 5$, $BD = 3$. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. 4,24 (точное значение: $\sqrt{5} + 2$).

Решение. Пусть $AC = a$, $BC = b$, $BD = c$, N — точка пересечения хорд, M — середина AD, H — точка пересечения прямых MN и BC. Обозначим $\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$, $\alpha + \beta = 90°$. Тогда $\angle BNH = \angle ANM = \angle MAN = \alpha$, $\angle CNH = \angle MND = \angle NDM = \beta$, $\angle BCD = \angle DAN = \alpha$, $\angle CBA = \angle CDA = \beta$ как опирающиеся на одну и ту же хорду. Поэтому прямые NH и BC перпендикулярны, и искомое расстояние равно длине отрезка MH.

Пусть $AN = x$, $NB = y$, $CN = u$, $ND = v$. Из подобия $\triangle ACN$ и $\triangle DBN$ и теоремы Пифагора получаем $\frac{u}{y} = \frac{a}{c}$, $u^2 + y^2 = b^2$, $x^2 = a^2 - u^2$, $v^2 = c^2 - y^2$. В итоге



$$MH = \frac{\sqrt{x^2 + v^2}}{2} + \frac{uy}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}{2} + \frac{abc}{a^2 + c^2},$$

что при $AC = 6$, $BC = 5$, $BD = 3$ даёт $MH = \sqrt{5} + 2 \approx 4{,}24$.

4.2. Четырёхугольник $KLMN$ со сторонами $KL = 4$, $LM = 10$, $MN = 12$ вписан в окружность. Определите расстояние между серединой стороны KN и прямой LM, если прямые KM и LN перпендикулярны. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. 6,87 (точное значение: $\sqrt{15} + 3$).

4.3. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Определите расстояние между серединой отрезка AD и прямой BC, если $BD = 6$, $AC = 12$, $BC = 10$. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. 8,47 (точное значение: $2\sqrt{5} + 4$).

4.4. Четырёхугольник $KLMN$ со сторонами $MN = 6$, $KL = 2$, $LM = 5$ вписан в окружность. Определите расстояние между серединой стороны KN и прямой LM, если прямые KM и LN перпендикулярны. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ. 3,44 (точное значение: $\frac{\sqrt{15}+3}{2}$).

5.1. Решите неравенство

$$8 \cdot \frac{|x+1| - |x-7|}{|2x-3| - |2x-9|} + 3 \cdot \frac{|x+1| + |x-7|}{|2x-3| + |2x-9|} \leqslant 8.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 120$.

Ответ. 6 (решение неравенства: $[\frac{3}{2}; 3) \cup (3; \frac{9}{2}]$).

Решение. Обозначим через a и b соответственно первое и второе слагаемые в левой части неравенства. Тогда $b > 0$ и

$$ab = 24 \cdot \frac{(x+1)^2 - (x-7)^2}{(2x-3)^2 - (2x-9)^2} = 24 \cdot \frac{8 \cdot (2x-6)}{6 \cdot (4x-12)} = 16$$

при $x \neq 3$, откуда $a = \frac{16}{b}$. Неравенство $\frac{16}{b} + b \leqslant 8$ ($\Leftrightarrow$ $\left(\frac{4}{\sqrt{b}} - \sqrt{b}\right)^2 \leqslant 0$) выполнено только при $b = 4$. Остаётся решить уравнение

$$3 \cdot \frac{|x+1| + |x-7|}{|2x-3| + |2x-9|} = 4.$$

Если $x \geqslant 7$ или $x \leqslant -1$, то выражение в левой части равно $\frac{3}{2}$. Если $-1 < x < \frac{3}{2}$ или $\frac{9}{2} < x < 7$, то оно равно $\frac{6}{|3-x|} < 4$. При всех $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}$ уравнение обращается в верное равенство. Итак, с учётом условия $x \neq 3$ получаем решение исходного неравенства: $[\frac{3}{2}; 3) \cup (3; \frac{9}{2}]$. Целочисленными решениями являются 2 и 4, они оба удовлетворяют условию $|x| < 120$, их сумма равна 6.

5.2. Решите неравенство

$$8 \cdot \frac{|x+3| - |x-5|}{|2x-11| - |2x+7|} - 9 \cdot \frac{|x+3| + |x-5|}{|2x-11| + |2x+7|} \geqslant -8.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 90$.

Ответ. 8 (решение неравенства: $[-3; 1) \cup (1; 5]$).

5.3. Решите неравенство

$$12 \cdot \frac{|x+10| - |x-20|}{|4x-25| - |4x-15|} - \frac{|x+10| + |x-20|}{|4x-25| + |4x-15|} \geqslant -6.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 100$.

Ответ. 10 (решение неравенства: $[\frac{15}{4}; 5) \cup (5; \frac{25}{4}]$).

5.4. Решите неравенство

$$9 \cdot \frac{|x+4| - |x-2|}{|3x+14| - |3x-8|} + 11 \cdot \frac{|x+4| + |x-2|}{|3x+14| + |3x-8|} \leqslant 6.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 110$.

Ответ. -6 (решение неравенства: $[-4; -1) \cup (-1; 2]$).

6.1. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: -1, 4, 6, 9, 10, 11, 15, 16, 20, 22. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -4914 (числа на доске: -3, 2, 7, 9, 13).

Решение. Сумма чисел полученного набора равна 112. Каждое число из исходных пяти в этой сумме повторяется 4 раза. Следовательно, сумма искомых чисел равна $112 : 4 = 28$. Сумма двух наименьших равна -1, сумма двух наибольших равна 22. Следовательно, среднее число (третье по величине из пяти) равно $28-22-(-1)=7$. В наборе из условия задачи второе число равно сумме первого и третьего искомых чисел, откуда первое число равно $4-7=-3$, а второе равно 2. Аналогично получаем, что четвёртое число равно 9, а пятое равно 13. Итак, на доске написаны числа -3, 2, 7, 9, 13, а их произведение равно -4914.

6.2. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: 3, 8, 9, 16, 17, 17, 18, 22, 23, 31. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 3360 (числа на доске: 1, 2, 7, 15, 16).

6.3. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: 2, 6, 10, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -3003 (числа на доске: -1, 3, 7, 11, 13).

6.4. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: 6, 9, 10, 13, 13, 14, 17, 17, 20, 21. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 4320 (числа на доске: 1, 5, 8, 9, 12).

6.5. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: -1, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 18, 20, 24. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -2002 (числа на доске: -2, 1, 7, 11, 13).

6.6. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: : 5, 8, 9, 13, 14, 14, 15, 17, 18, 23. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 4752 (числа на доске: 2, 3, 6, 11, 12).

6.7. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: -1, 2, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 20. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. -2970 (числа на доске: -3, 2, 5, 9, 11).

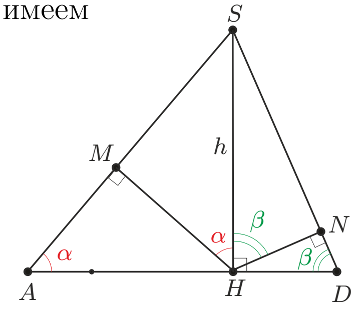
6.8. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: 5, 9, 10, 11, 12, 16, 16, 17, 21, 23. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

Ответ. 5292 (числа на доске: 2, 3, 7, 9, 14).

7.1. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{12}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 374,12 (точное значение: $216\sqrt{3}$).

Решение. Рассмотрим сечение пирамиды $SABC$, проходящее через боковое ребро SA и апофему противоположной грани SD. Тогда SH — высота пирамиды, расстояние от H до прямой SD равно $HN=2x$, где $x=2$, а расстояние от H до прямой SA равно $HM=2y$, где $y=2\sqrt{3}$. Обозначим $SH=h$, $AB=a$ и $HD=d=a\sqrt{3}/6$, тогда $AH=2d$, $V=\frac{a^2h}{4\sqrt{3}}=\sqrt{3}d^2h$ и, пользуясь связью между высотой прямоугольного треугольника и его катетами, имеем



$$\begin{cases} \dfrac{1}{d^2}+\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{(2x)^2} \\ \dfrac{1}{(2d)^2}+\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{(2y)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2=\dfrac{3x^2y^2}{y^2-x^2} \\ h^2=\dfrac{12x^2y^2}{4x^2-y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=\frac{18x^3y^3}{(y^2-x^2)\sqrt{4x^2-y^2}}=216\sqrt{3}\approx 374{,}12.$$

7.2. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{11}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 335,64 (точное значение: $1584\sqrt{2{,}2}/7$).

7.3. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{10}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 309,84 (точное значение: $80\sqrt{15}$).

7.4. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{7}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 296,32 (точное значение: $112\sqrt{7}$).

7.5. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{6}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 334,63 (точное значение: $432\sqrt{0{,}6}$).

7.6. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{5}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 485,42 (точное значение: $720\sqrt{5/11}$).

7.7. Расстояния от середины высоты правильной треугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра равны 2 и $\sqrt{13}$ соответственно. Найдите объём пирамиды. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 432,99 (точное значение: $208\sqrt{13/3}$).

7.8. Расстояния от середины высоты правильной треугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра равны 2 и $\sqrt{14}$ соответственно. Найдите объём пирамиды. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ. 533,38 (точное значение: $201{,}6\sqrt{7}$).

8.1. В разложении функции $f(x) = (1 + x - x^2)^{20}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n}, где n равно сумме всех коэффициентов разложения.

Ответ. 760.

Решение. Разложение по степеням x имеет вид $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{40} a_k x^k$. Сумма всех коэффициентов равна $\sum\limits_{k=0}^{40} a_k = f(1) = 1$. Следовательно, надо найти коэффициент при x^3. Имеем:

$$f(x) = ((1 - x^2) + x)^{20} = (1 - x^2)^{20} + 20(1 - x^2)^{19}x + \frac{20 \cdot 19}{2}(1 - x^2)^{18}x^2 + \\ + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6}(1 - x^2)^{17}x^3 + \text{слагаемые, в которые } x^3 \text{ не входит.}$$

В первое и третье слагаемое x^3 также не входит. Во второе слагаемое x^3 входит с коэффициентом $(-20) \cdot 19 = -380$; в четвёртое слагаемое x^3 входит с коэффициентом $\frac{20\cdot19\cdot18}{6} = 1140$. Значит коэффициент при x^3 равен $-380 + 1140 = 760$.

8.2. В разложении функции $g(x) = (1 - x + x^2)^{15}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n}, где n есть сумма всех коэффициентов разложения.

Ответ. -665.

8.3. В разложении функции $f(x) = (1 + x - x^2)^{25}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n}, где n есть сумма всех коэффициентов разложения.

Ответ. 1700.

8.4. В разложении функции $g(x) = (1 - x + x^2)^{20}$ по степеням x найдите коэффициент при x^{3n}, где n есть сумма всех коэффициентов разложения.

Ответ. -1520.

9.1. Найдите наименьшее четырёхзначное число, не кратное 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое является делителем первоначального, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 8712.

Решение. Найдём все четырёхзначные числа, обладающие указанным в условии задачи свойством. Пусть $\overline{abcd}$ — искомое число, тогда $\overline{dcba}$ — число, полученное из него перестановкой цифр в обратном порядке, $a, d \neq 0$. По условию $\overline{abcd} = k \cdot \overline{dcba}$, где k — натуральное, $k > 1$. С одной стороны, имеем $1000kd < k \cdot \overline{dcba} = \overline{abcd} < 1000(a+1)$, откуда $kd < a + 1$, поэтому $kd \leqslant a$, $d \leqslant \dfrac{a}{k}$. С другой стороны, $1000k(d+1) > k \cdot \overline{dcba} = \overline{abcd} > 1000a$, откуда $k(d+1) > a$, $d > \dfrac{a}{k} - 1$. Следовательно, $d = \left[\dfrac{a}{k}\right]$, где $[x]$ означает целую часть числа x (т. е. наименьшее целое число, не превосходящее x). Тогда $a \geqslant k$, так как иначе $d = \left[\dfrac{a}{k}\right] = 0$.

Заметим также, что последняя цифра числа ak должна быть равна $d = \left[\dfrac{a}{k}\right]$. Составим таблицу, в клетки которой для каждой пары a и k запишем последовательно значение $\left[\dfrac{a}{k}\right]$ (если оно отлично от нуля) и последнюю цифру числа ak.

$k \setminus a$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1 4	1 6	2 8	2 0	3 2	3 4	4 6	4 8
3		1 9	1 2	1 5	2 8	2 1	2 4	3 7
4			1 6	1 0	1 4	1 8	$\boxed{2\ \ 2}$	2 6
5				1 5	1 0	1 5	1 0	1 5
6					1 6	1 2	1 8	1 4
7						1 9	1 6	1 3
8							1 4	1 2
9								$\boxed{1\ \ 1}$

Здесь выделены те клетки, в которых обе цифры одинаковы. Таким образом, требуемое условие может быть выполнено только в двух случаях: 1) $a = 8$, $k = 4$ (тогда $d = 2$) и 2) $a = 9$, $k = 9$ (тогда $d = 1$).

В первом случае для цифр b и c получаем равенство

$$8000 + 100b + 10c + 2 = 4 \cdot (2000 + 100c + 10b + 8) \quad \Leftrightarrow \quad 2b = 13c + 1.$$

Если $c = 0$, то $2b = 1$, что невозможно. При $c \geqslant 2$ получим $b = \frac{13c+1}{2} > 13$, что также невозможно. Остаётся вариант $c = 1$, $b = 7$.

Во втором случае для цифр b и c получаем равенство

$$9000 + 100b + 10c + 1 = 9 \cdot (1000 + 100c + 10b + 9) \quad \Leftrightarrow \quad b = 89c + 8.$$

При $c \geqslant 1$ имеем $b = 89c + 8 \geqslant 97$, что невозможно. Поэтому в этом случае $c = 0$, $b = 8$.

Итак, указанным в условии задачи свойством обладают только числа 8712 и 9801.

9.2. Найдите наибольшее четырёхзначное число, не кратное 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое является делителем первоначального, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 9801.

9.3. Найдите наименьшее четырёхзначное число, не делящееся на 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое кратно первоначальному, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 1089.

9.4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, не делящееся на 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое кратно первоначальному, причём частное отлично от единицы.

Ответ. 2178.

10.1. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{11}{x+1{,}5}+\frac{8}{x}\geqslant\frac{12}{x+2}+2.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.

Пример требуемой задачи. Пункты А и Б соединены двумя дорогами: одна длиной 19 км, а другая — 12 км. В 12:00 из пункта А по длинной дороге вышел пешеход и прошёл первые 11 км с некоторой постоянной скоростью, а затем, утомившись, шёл остаток пути до пункта Б в среднем на 1,5 км/ч медленнее. В 14:00 из пункта А по короткой дороге вышел второй пешеход и прошёл весь путь со средней скоростью, на 0,5 км/ч большей, чем вначале шёл первый. С какой средней скоростью первый пешеход прошёл последние 8 км пути, если известно, что он прибыл в пункт Б не раньше второго пешехода?

Краткое решение. Если x — искомая средняя скорость первого пешехода (в км/ч) на втором участке пути, то $x+1{,}5$ — его скорость на первом участке, а $(x+1{,}5)+0{,}5=x+2$ — средняя скорость второго пешехода. Тогда, подсчитывая время, затраченное каждым из пешеходов на дорогу, из условия задачи получаем требуемое неравенство. Поскольку по смыслу задачи $x>0$, обе части неравенства можно домножить на величину $x(x+1{,}5)(x+2)>0$, тогда получим $11x(x+2)+8(x+1{,}5)(x+2)\geqslant 12x(x+1{,}5)+2x(x+1{,}5)(x+2)$, или, после преобразований, $(x-4)(x+1)(x+3)\leqslant 0$. Следовательно, $0<x\leqslant 4$, причём все найденные значения x удовлетворяют условию задачи.

Ответ: не более 4 км/ч.

10.2. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{8}{x-1}+\frac{6}{x}+1\leqslant\frac{9}{x-3{,}5}.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.

10.3. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{40}{x}+\frac{30}{x+1}\geqslant\frac{90}{2x-5}-5.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.

10.4. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{20}{x-2}+\frac{55}{2x-1}-5\leqslant\frac{30}{x}.$$

Напишите формулировку задачи, её решение и ответ.