Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2016/2017 учебный год
Заключительный этап для 10–11 классов

Решения и ответы к варианту 1, ответы к вариантам 2—4

1. Когда автомобиль едет из пункта A в пункт B, он тратит 25% времени на путь в гору, 60% — по равнине, а остальное время — с горы. Время его движения из A в B и по той же дороге из B в A одинаково, а его скорости в гору, с горы и по равнине постоянны, но различны. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

Ответ: 5/3.

Решение. Если скорость автомобиля с горы в $x \neq 1$ раз больше скорости в гору, то из условия имеем:

$$0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}25/x + 0{,}15x \quad \Rightarrow \quad 0{,}15x^2 - (0{,}25 + 0{,}15)x + 0{,}25 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x-5/3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5/3.$$

Ответ к варианту 2: 5/4. *Ответ к варианту 3:* 4/3. *Ответ к варианту 4:* 7/4.

2. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} + \sqrt{2}$.

Ответ: $\dfrac{257}{16}$.

Решение. Обозначим $t = \sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$, тогда $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \frac{2}{\sqrt{t}}$, и данное уравнение принимает вид $\sqrt{t} = \frac{4}{\sqrt{t}} + \sqrt{2}$, или $t - \sqrt{2t} - 4 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{t}$, находим $\sqrt{t} = -\sqrt{2}$ или $\sqrt{t} = 2\sqrt{2}$. Первое уравнение решений не имеет, а из второго, возвращаясь к переменной x, получаем

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2\sqrt{x^2-4} = 64 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-4 = (32-x)^2, \\ x \leqslant 32 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{257}{16}.$$

Ответ к варианту 2: $\dfrac{577}{16}$. *Ответ к варианту 3:* $\dfrac{1025}{16}$. *Ответ к варианту 4:* $\dfrac{745}{36}$.

3. Выясните, какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11$.

Ответ: первое.

Решение. Поскольку $11^{\lg 121} = \left(11^{\lg 11}\right)^2$, а $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11 = 10 \cdot \left(10^{\lg 11}\right)^{\lg 11} + 11 = 10 \cdot 11^{\lg 11} + 11$, требуется сравнить числа x^2 и $10x + 11$, где $x = 11^{\lg 11}$. Выражение $x^2 - 10x - 11 = (x-11)(x+1)$ в точке $x = 11^{\lg 11} > 11$ принимает положительное значение, поэтому первое число больше.

Ответ к варианту 2: первое. *Ответ к варианту 3:* второе. *Ответ к варианту 4:* второе.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Решение. Пусть M — точка пересечения касательных. По условию M лежит на прямой BD. Поскольку $BC < CD$, точка B находится между точками M и D. Тогда, так как $\angle MCB = \angle CDB = \frac{\smile BC}{2}$, то треугольники MCB и MDC подобны, поэтому $\frac{CD}{BC} = \frac{MD}{MC}$. Аналогично из подобия треугольников MAB и MDA получаем $\frac{AD}{AB} = \frac{MD}{AM}$. Кроме того, отрезки касательных к окружности MC и MA равны, поэтому $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB}$, а значит, $AD = \frac{AB \cdot CD}{BC} = \frac{2 \cdot 5}{4} = \frac{5}{2}$.

Ответ к варианту 2: $\frac{9}{4}$. *Ответ к варианту 3:* $\frac{5}{4}$. *Ответ к варианту 4:* $\frac{7}{2}$.

5. Вычислите $\sqrt{n} + \sqrt{n+524}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное.

Ответ: 262.

Решение. Пусть искомое число равно a. Имеем $\sqrt{n+524} = a - \sqrt{n}$, $n + 524 = a^2 - 2a\sqrt{n} + n$. По условию a рационально, поэтому и $\sqrt{n}$ рационально. Значит, $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда число $\sqrt{n+524}$ тоже рационально, поэтому $n + 524 = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Значит, $m^2 - k^2 = 524$, $(m-k)(m+k) = 4 \cdot 131$. Заметим, что числа $m-k$ и $m+k$ одинаковой чётности, а число 131 простое. Следовательно, $m - k = 2$ и $m + k = 2 \cdot 131$. Оба равенства выполнены при $m = 132$, $k = 130$. Итак, $a = m + k = 262$.

Ответ к варианту 2: 226. *Ответ к варианту 3:* 254. *Ответ к варианту 4:* 218.

6. В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объём этого шара, если он в три раза меньше объёма конуса.

Ответ: $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ или $\frac{16\pi}{9}\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть r — радиус вписанного шара, $R=2$ — радиус основания, h — высота конуса, 2φ — угол между образующей конуса и плоскостью его основания, $0<\varphi<\pi/4$, $t=\operatorname{tg}\varphi$, $0<t<1$. Тогда $r=Rt$, $h=R\operatorname{tg}2\varphi=R\frac{2t}{1-t^2}$. По условию

$$kV_{\text{шара}}=V_{\text{конуса}} \quad\Leftrightarrow\quad k\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{3}\pi R^2h \quad\Leftrightarrow\quad 4kt^3=\frac{2t}{1-t^2} \quad\Leftrightarrow\quad 2kt^4-2kt^2+1=0.$$

При $k=3$ это уравнение имеет два решения $t_{1,2}=\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}=\frac{\sqrt{3\pm\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$, причём оба удовлетворяют условию $0<t<1$. Значит, возможны два случая, в одном из которых объём шара равен $V=\frac{4}{3}\pi R^3t^3=\frac{16\pi}{9}\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, а в другом $V=\frac{16\pi}{9}\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

Ответ к варианту 2: $18\pi\sqrt{20+14\sqrt{2}}$ или $18\pi\sqrt{20-14\sqrt{2}}$.
Ответ к варианту 3: $\frac{4\pi}{3}\sqrt{20+14\sqrt{2}}$ или $\frac{4\pi}{3}\sqrt{20-14\sqrt{2}}$.
Ответ к варианту 4: $18\pi\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ или $18\pi\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:
1) «Уравнение $\cos(\cos x)+\sin(\sin x)=a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0;\pi]$»;
2) «Уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x=a$ имеет корни».

Ответ: $[-\frac{1}{2};\cos 1)\cup(\frac{3}{2};1+\sin 1)$.

Решение. 1) Функция $f(x)=\cos(\cos x)+\sin(\sin x)$ возрастает на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (каждое из слагаемых — монотонно возрастающая функция) и убывает на промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π (так как $f(\pi-x)=f(x)$). Поэтому $E(f)=[f(0);f(\pi/2)]=[\cos 1;1+\sin 1]$. Данное уравнение имеет ровно два корня на отрезке $[0;\pi]$ при $a\in[\cos 1;1+\sin 1)$.

2) Во втором уравнении используем замену $t=\sin 2x$:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin 2x=a\Leftrightarrow 1-\frac{t^2}{2}+t=a\Leftrightarrow t^2-2t-2=-2a.$$

Область значений функции $g(t)=t^2-2t-2=(t-1)^2-3$ на отрезке $[-1;1]$ есть множество $E(g)=[g(1);g(-1)]=[-3;1]$. Данное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $-2a\in[-3;1]$, то есть $a\in[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$.

3) Поскольку $1+\sin 1>1+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$, ровно одно из данных утверждений 1), 2) является истинным при $a\in[-\frac{1}{2};\cos 1)\cup(\frac{3}{2};1+\sin 1)$.

Ответ к варианту 2: $[-\frac{3}{2};-1+\cos 1)\cup(\frac{1}{2};\sin 1)$.
Ответ к варианту 3: $(-1-\sin 1;-\frac{3}{2}]\cup(-\cos 1;\frac{1}{2}]$.
Ответ к варианту 4: $(-\sin 1;-\frac{1}{2})\cup(1-\cos 1;\frac{3}{2}]$.

8. Рассматриваются всевозможные наборы, которые состоят из 2017 различных натуральных чисел и в каждом из которых ни одно из чисел нельзя представить в виде суммы двух других чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в таком наборе?

Ответ: 4032.

Решение. Положим для краткости $n=2017$. Рассмотрим следующий набор из n чисел: $n-1$, n, $n+1$, …, $2n-3$, $2n-2$. Так как $(n-1)+n=2n-1>2n-2$, то ни одно из чисел этого набора не может равняться сумме двух других, то есть представленный набор удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь имеется произвольный набор из n натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи. Докажем, что наибольшее из этих чисел N не меньше, чем $2n-2$. Пусть $N\leqslant 2n-3$. Докажем, что в таком наборе чисел есть пара чисел, меньших N, сумма которых равна N. Разобьём все натуральные числа, меньшие N, на пары с суммой, равной N: $(1,N-1)$; $(2,N-2)$, …. Если таких пар $n-1$ или больше, то чисел, меньших N, будет не меньше, чем $2n-2$, что невозможно. Поэтому таких пар не больше, чем $n-2$, а чисел в наборе n. Значит, в наборе найдётся, по крайней мере, одна пара чисел с суммой, равной N.

Таким образом, в произвольном наборе из n чисел, удовлетворяющих условию задачи, наибольшее из этих чисел не меньше, чем $2n-2$ (причём эта оценка достижима). В случае $n=2017$ это число 4032.

Ответ к варианту 2: 4030. *Ответ к варианту 3:* 4028. *Ответ к варианту 4:* 4034.