МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников
«ЛОМОНОСОВ»
по математике

2015/2016 учебный год

http://olymp.msu.ru

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

Отборочный этап 2015/2016 учебного года

Ответы и решения

9 Класс

1. В слове «ЛОМОНОСОВ» замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные – разными, так, чтобы при этом получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

   Ответ: 987858180.

2. Число $\underbrace{99\ldots9}_{999\text{ цифр}}$ разложили на простые сомножители. Найдите количество сомножителей, равных 3, в этом разложении.

   Ответ: 3^5.

   Решение: Обозначим $I(n) = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}$. Легко показать, что если $I(n)$ кратно 3^k, то $I(3n)$ кратно 3^{k+1}. Тогда $I(111) \vdots 3$, $I(333) \vdots 3^2$, $I(999) \vdots 3^3$. Число из условия задачи равно $9I(999)$, поэтому оно кратно 3^5.

3. Пусть $P(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)$. Найдите наибольший общий делитель чисел $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(2015)$.

   Ответ: 30.

   Решение: $P(1) = 5! = 120$, следовательно НОД должен быть делителем 120. Заметим, что $P(2)$ кратно 2, но не кратно 4, поэтому в НОД не может входить больше одной двойки. Следовательно, НОД – делитель 30.

   Покажем, что все $P(n)$ делится на 30. Действительно, $n(n+1)$ всегда кратно 2. Если n не кратно 3, то числа $n+1$, $2n+1$ и $3n+1$ дают различные остатки при делении на 3, следовательно, какое-то делится нацело на 3. Аналогично, либо n кратно 5, либо одно из чисел $n+1$, $2n+1$, $3n+1$, $4n+1$ делится на 5.

4. В одном интернет-сообществе каждый из участников имеет ровно 22 друга (дружба обоюдная). При этом если два члена сети дружат, то у них нет общих друзей, а если не дружат, то у них ровно 6 общих друзей. Сколько человек в этом интернет-сообществе?

   Ответ: 100.

   Решение: Пусть в сообществе N людей. Подсчитаем число упорядоченных троек $a-b-c$, в которых b дружит с a и с c. Зафиксируем b (это можно сделать N способами). Тогда для него получится $22 \cdot 21 = 462$ таких троек. Итого получается $462N$. С другой стороны можно сначала выбрать a – N способов, потом c – $N-23$ способа (надо вычесть его друзей и его самого). Тогда b можно выбрать 6 способами, итого $6N(N-23)$.

   Получим уравнение $462N = 6N(N-23)$, откуда $N = 100$.

5. Сколькими различными способами можно разменять 1000 рублей, используя только рублевые, 5-рублевые и 10-рублевые монеты?

Ответ: 10201.

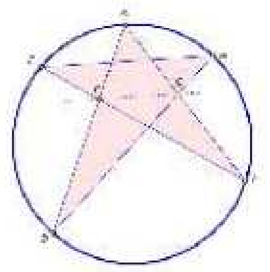
Решение: Задача сводится к нахождению числа решений неравенства $10x + 5y \leqslant 1000$ в неотрицательных целых числах $x, y \geqslant 0$. Преобразовав к виду $y \leqslant 200 - 2x$, получим, что при $x = 0$ решений 201, при $x = 1$ решений 199,... , при $x = 100$ — решение единственно. Всего получится $1 + 3 + ... + 201 = (1 + 201) * 101/2 = 101^2 = 10201$.

6. Числа x, y и z таковы, что $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ и $x \cdot y \cdot z \neq 0$. Какие значения может принимать выражение $\frac{(x+y+z)^3}{xyz}$?

Ответ: 27.

Решение: Несложно показать, что при $a + b + c = 0$ выполнено равенство $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Подставим $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}, c = \sqrt[3]{z}$, и возводя в куб, получим $\frac{(x+y+z)^3}{xyz} = 27$.

7. В окружность вписана пятиконечная звезда $ABCDE$ так, как показано на рисунке. При этом дуги AB и AE имеют одинаковую градусную меру. Пусть F — точка пересечения AD и CE, а G — точка пересечения AC и BD. Найдите угол между прямыми BE и FG.



Решение: Обозначим L и M — точки пересечения EB с AD и AC, соответственно. Тогда $\triangle CAF \propto \triangle DAG$, т.к. у них общий угол A и равны углы, опирающиеся на равные дуги. Следовательно, $AF : AC = AG : AD$, поэтому и $\triangle AFG \propto \triangle ACD$.

С другой стороны $\angle ACD$ равен половине дуги AD, т.е. равен полусумме дуг AB и ED, следовательно равен углу между хордами AD и BE.

В итоге получим $\angle ALB = \angle ACD = \angle AFG$, откуда и вытекает $BE \parallel FG$.

8. Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см, на каждой отмечено по 10 точек, идущих через 1 см. Нужно из этих 20 точек выбрать 9 таких точек, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 420.

Решение: Очевидно, что нельзя выбрать более 5 точек на одной прямой. Значит на одной прямой будет 5 точек, а на другой — 4. Выбрать 4 точки на прямой означает разбить отрезок длины 9 на 5 отрезков, причем средние по условию должны быть не менее 2. Т.е. надо найти количество решений уравнения $x_1 + \ldots + x_5 = 9$ в неотрицательных целых числах, причем $x_2, x_4, x_5 \geqslant 2$. Обозначим $y_1 = x_1+1, y_5 = x_5+1$, $y_2 = x_2-1$, $y_3 = x_3-1$, $y_4 = x_4-1$. Тогда задача сводится к количеству решений уравнения $y_1 + \ldots + y_5 = 8$ в натуральных числах. Это — известная задача о шарах и перегородках, число решений равно $C_7^4 = 35$. Аналогично можно показать, что для 5 точек число вариантов равно $C_6^6 = 6$. В итоге число вариантов $2C_7^4 \cdot C_6^6 = 420$.

9. При каких натуральных n существуют положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3; \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 3. \end{cases}$$

Укажите эти числа.

Ответ: Ответ: $n = 2$, $x_1 = (3 \pm \sqrt{5})/2$, $x_2 = 3 - x_1$; или $n = 3$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Решение: Основная идея: $x + 1/x \geq 2$, следовательно, сложив два равенства, получим $n \leq 3$. Далее надо отдельно рассмотреть случаи $n = 2$ и $n = 3$ (при $n = 1$, очевидно, решений нет).

2015/2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **70** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

не присуждать.

ПРИЗЁР (диплом II степени):

***100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **80** баллов до **99** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике*