МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по математике

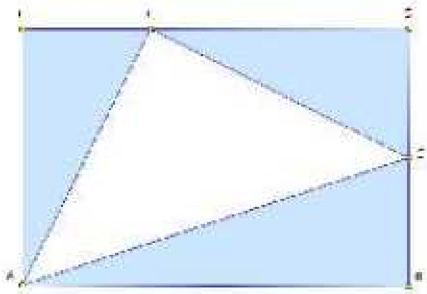
2015/2016 учебный год

5) Заключительный этап младшие классы.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике. 9 класс

Ответы и решения

1. В прямоугольнике $ABDF$ на сторонах $BD=2$ и $DF=3$ выбрали точки C и E соответственно, так, что треугольник AFE равен треугольнику EDC. Потом от прямоугольника $ABDF$ отрезали треугольники ABC, CDE и AFE. Найдите углы оставшегося треугольника.



Ответ: $45°$, $45°$, $90°$. **Решение.** Так как треугольники AFE и EDC равны, то $\angle FAE=\angle DEC$, $\angle FEA=\angle DCE$, $AE=EC$. При этом, так как $\angle FEA+\angle FAE=90°$, то $\angle FEA+\angle DEC=90°$. Значит, $\angle AEC=90°$ и треугольник AEC равнобедренный. Поэтому его углы: $45°$, $45°$, $90°$.

2. Можно ли нанести на грани двух кубиков неотрицательные целые числа так, чтобы при случайном бросании сумма выпавших очков могла быть равна любому целому числу от 1 до 36?
Если это возможно, то в ответе укажите сумму всех 12 чисел на гранях; если невозможно – в ответе запишите 0.

Ответ: Сумма равна 111. **Решение.** Можно на гранях одного кубика разместить, например, числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а на гранях другого – 0, 6, 12, 18, 24, 30. Тогда сумма выпавших очков может быть равна любому из целых чисел от 1 до 36. Сумма чисел на всех гранях равна 111. Эта сумма не зависит от того, как размечать кости. Поскольку сумма от 1 до 36 равна 666, то среднее (мат. ожидание) равно $666/36=18{,}5$. С другой стороны, можно посчитать среднее для каждой кости отдельно, получится, а значит, $S_1+S_2=111$.

3. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{LOM}$, состоящие из различных цифр L, O и M, для которых выполняется равенство:

$$\overline{LOM}=(L+O+M)^2+L+O+M.$$

Ответ: 156. **Указания.** Обозначим $x=L+O+M$. Тогда $\overline{LOM}=x(x+1)$. При этом $x\geq 10$ (иначе $x(x+1)<100$) и $x\leq 24$ (сумма цифр не превышает $9+8+7=24$). Поэтому $x\in[10;24]$. Из соотношения $100\cdot L+10\cdot O+M=x^2+L+O+M$ следует, что $x^2=99\cdot L+9\cdot O$, то есть x делится на 3. Осталось подставить значения 12, 15, 18, 21 и 24 в $x(x+1)$ и подсчитать сумму цифр получившегося числа. Она совпадает с x только при $x=12$.

4. Пете на день рождения подарили новый электролобзик, с функцией подсчета длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 50 см и распилил его на квадраты со стороной 10 см и квадраты со стороной 20 см. Сколько всего квадратов получилось, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 80 см?

Ответ: 16. **Решение.** Каждый пропил входит в периметры двух фигур, кроме того, надо учесть периметр исходного квадрата, откуда получаем, что суммарный периметр получившихся квадратиков равен $280 \cdot 2 + 200 = 760$. Теперь можно либо обозначить количество квадратиков через x и y соответственно и решить систему $\begin{cases} 10^2 \cdot x + 20^2 \cdot y = 50^2, \\ 4 \cdot 10 \cdot x + 4 \cdot 20 \cdot y = 760, \end{cases}$ либо привести следующее рассуждение. Если бы все квадратики имели сторону 10, то их было бы 25 штук, тогда суммарный периметр был бы равен $25 \cdot 40 = 1000$. Если заменить четыре маленьких квадрата 10x10 на квадрат 20x20, то периметр уменьшится на $160 - 80 = 80$ см. Чтобы из 1000 получить 760, надо это сделать 3 раза. Значит, будет 3 квадрата 20x20 и 13 квадратов 10x10 – всего 16 квадратов.

5. Сколько существует четырехзначных чисел, обладающих следующими свойствами: все цифры числа чётные; число кратно четырём; если зачеркнуть последнюю цифру, то полученное трёхзначное число не кратно четырём?

Ответ: 120. **Решение.** Последняя цифра числа должна делиться на 4 (то есть это может быть 0, 4 или 8), а предпоследняя – нет (2 или 6). Кроме того, первая цифра не ноль. Значит, получается $4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 120$ вариантов.

6. Найдите величину $f\left(\frac{1}{2016}\right)+f\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+f\left(\frac{2016}{2016}\right)$, если $f(x)=\frac{x^3+9x-2}{x^2-x+2}$.

Ответ: 3026,5. **Решение.** $f(x)=\frac{x^3+9x-2}{x^2-x+2}=x+1+\frac{8x-4}{x^2-x+2}=\frac{3}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{8\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{3}{2}+g(x)$. При этом, функция $g(x)$ обладает свойством то $g\left(\frac{1}{2}+t\right)=-g\left(\frac{1}{2}-t\right)$. Поэтому $g\left(\frac{1}{2016}\right)=-g\left(\frac{2015}{2016}\right)$, $g\left(\frac{2}{2016}\right)=-g\left(\frac{2014}{2016}\right)$, ..., $g\left(\frac{1007}{2016}\right)=-g\left(\frac{1009}{2016}\right)$, и $g\left(\frac{1}{2016}\right)+g\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+g\left(\frac{2016}{2016}\right)=g\left(\frac{1008}{2016}\right)+g\left(\frac{2016}{2016}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)+g(1)=0+\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.

Значит, $f\left(\frac{1}{2016}\right)+f\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+f\left(\frac{2016}{2016}\right)=\frac{3}{2}\cdot 2016+\frac{5}{2}=3026,5$.

2015/2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **70** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

не присуждать.

ПРИЗЁР (диплом II степени):

***100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **80** баллов до **99** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике*