МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по математике

2015/2016 учебный год

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике. 7 – 8 классы

Ответы и решения

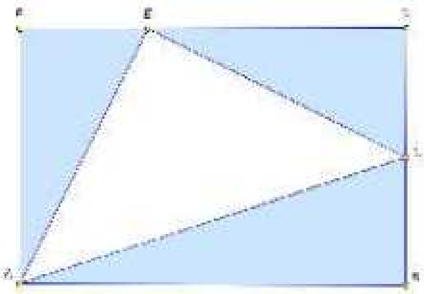
1. На сколько недель может накладываться год? Считаем, что год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на данный год.

Ответ: На 53 или 54 недели. **Решение.** Если в году 365 дней (год невисокосный), то, так как $365 = 52 \cdot 7 + 1$, то в году не менее 53 недель. Если год високосный, то есть в году 366 дней ($366 = 52 \cdot 7 + 2$), то возможна ситуация, когда год начинается с последнего дня недели, затем идут 52 полных недели, а затем первый день следующей недели – всего 54 разных недели. Если недель 55 (или более), то полных недель не менее 53, что невозможно, так как $53 \cdot 7 = 371 > 366$.

2. В коробке лежат синие, красные и зелёные карандаши – всего 20 штук. Синих карандашей в 6 раз меньше, чем зелёных. Красных карандашей тоже меньше, чем зелёных. Сколько карандашей нужно вытащить из коробки, чтобы вероятность того, что среди вытащенных карандашей есть хотя бы один красный, была равна 1?

Ответ: 15. **Решение.** Если синий карандаш 1, то зеленых 6, но тогда красных будет больше, чем зеленых. Если синих карандашей 3 (или больше), то зеленых не меньше 18, что в сумме дает больше 20 карандашей. Значит, в коробке 2 синих карандаша, а поэтому 12 зеленых и 6 красных. Если из коробки вытащить 14 карандашей, то это могут быть 2 синих и 12 зеленых, а красных не будет. Если же вытащить 15, то хотя бы один красный среди них обязательно будет.

3. В прямоугольнике $ABDF$ на сторонах $BD = 2$ и $DF = 3$ выбрали точки C и E соответственно, так, что треугольник AFE равен треугольнику EDC. Потом от прямоугольника $ABDF$ отрезали треугольники ABC, CDE и AFE. Найдите углы оставшегося треугольника.



Ответ: $45°$, $45°$, $90°$. **Решение.** Так как треугольники AFE и EDC равны, то $\angle FAE = \angle DEC$, $\angle FEA = \angle DCE$, $AE = EC$. При этом, так как $\angle FEA + \angle FAE = 90°$, то $\angle FEA + \angle DEC = 90°$. Значит, $\angle AEC = 90°$ и треугольник AEC равнобедренный. Поэтому его углы: $45°$, $45°$, $90°$.

4. Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0.

Ответ: 31. **Решение.** По условию эти числа состоят только из цифр 1, 2, 3, 4 и 5. На 4 из таких чисел делится одно однозначное число: 4 и пять двузначных: 12, 24, 32, 44, 52. Если ко всем этим двузначным числам спереди приписать 1, 2, 3, 4 или 5, то они тоже будут делиться на 4. Других делящихся на 4 трехзначных чисел не будет (признак делимости на 4). Значит, всего таких чисел: $1+5\cdot 6=31$.

5. Расставьте знаки **×** и **:** вместо квадратиков в выражении

$$\mathbf{1 \square 3 \square 3^2 \square 3^4 \square 3^8 \square 3^{16} \square 3^{32} \square 3^{64} = 3^{99}}$$

таким образом, чтобы значение выражения стало равно 3^{99}.

Ответ: $1\times 3:3^2:3^4:3^8\times 3^{16}\times 3^{32}\times 3^{64}=3^{99}$. **Решение.** Задача сводится к выбору между знаками «плюс» и «минус» в тождестве $0\pm 1\pm 2\pm 4\pm 8\pm 16\pm 32\pm 64=99$. Это можно сделать просто подбором. Но также можно обозначить сумму чисел «с плюсом» через x, а сумму модулей чисел «с минусом» через y. Тогда, так как сумма $1+2+3+...+64=127$, то из системы $\begin{cases} x+y=127, \\ x-y=99 \end{cases}$ находим $x=113$, $y=14$. Так как $y=14=2+4+8$, то минус будет стоять перед 2, 4, 8.

6. Пете на день рождения подарили новый электролобзик, с функцией подсчета длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 50 см и распилил его на квадраты со стороной 10 см и квадраты со стороной 20 см. Сколько всего квадратов получилось, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 80 см?

Ответ: 16. **Решение.** Каждый пропил входит в периметры двух фигур, кроме того, надо учесть периметр исходного квадрата, откуда получаем, что суммарный периметр получившихся квадратиков равен $280\cdot 2+200=760$. Теперь можно либо обозначить количество квадратиков через x и y соответственно и решить систему $\begin{cases} 10^2\cdot x+20^2\cdot y=50^2, \\ 4\cdot 10\cdot x+4\cdot 20\cdot y=760, \end{cases}$ либо привести следующее рассуждение. Если бы все квадратики имели сторону 10, то их было бы 25 штук, тогда суммарный периметр был бы равен $25\cdot 40=1000$. Если заменить четыре маленьких квадрата 10x10 на квадрат 20x20, то периметр уменьшится на $160-80=80$ см. Чтобы из 1000 получить 760, надо это сделать 3 раза. Значит, будет 3 квадрата 20x20 и 13 квадратов 10x10 – всего 16 квадратов.

2015/2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **70** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

не присуждать.

ПРИЗЁР (диплом II степени):

***100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **80** баллов до **99** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике*