



МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

*олимпиады школьников
«ЛОМОНОСОВ»
по математике*

2015/2016 учебный год

2) Отборочный этап 10-11 класс второй отборочный тур:

Задания для разминки

::1:: Решите уравнение $(1-x)x = (x+1)(3-x)$. В ответе запишите сумму всех его корней.

Ответ: -3 .

::2:: В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 5, а длина проведённой к основанию высоты равна 3. Найдите длину основания.

Ответ: 8.

Основное задание

::1.1:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

Ответ: 987858180. **Решение.** Для делимости на 90 необходимо и достаточно, чтобы число оканчивалось на ноль ($V=0$), а сумма всех цифр числа делилась на 9. Начинаем слева: $L=9$, $O=8$, $M=7$, доходим до буквы Н. Если $H=6$, то решений не оказывается. Если $H=5$, то получаем ответ: 987858180.

::1.2:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наибольшее возможное число, кратное 60.

Ответ: 987868380.

::1.3:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное девятизначное число, кратное 60.

Ответ: 123242520.

::1.4:: В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное девятизначное число, кратное 90.

Ответ: 123262920.

::2.1:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 0? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,63. **Решение.** На первых двух позициях цифра 0 встречается в 00–09, 10, 20 часов — всего 12 раз, при любом числе минут, а в течение каждого из 12 оставшихся часов на последних двух позициях цифра 0 встречается в 00–09, 10, 20, ..., 50 минут — всего 15 раз. Поэтому среди всех (равновероятных) показаний часов цифра 0 встретится с вероятностью $\frac{12 \cdot 60 + 15 \cdot 12}{24 \cdot 60} = \frac{5}{8} = 0,625 \approx 0,63$.

::2.2:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 1? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,63.

::2.3:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 2? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,44.

::2.4:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 3? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,34.

::2.5:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 4? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,31.

::2.6:: Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 5? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,31.

::3.1:: Решите неравенство $\sqrt{7+8\cos^2\left(\frac{\pi x}{18}\right)} > 4\sin^2\frac{\pi x}{18}$. В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 31]$.

Ответ: 136. **Решение.** Сделаем замену $t = \sin^2\frac{\pi x}{18}$. Тогда $\sqrt{7+8-8t} > 4t \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} t \in [0; 1], \\ 15-8t > 16t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left[0; \frac{3}{4}\right). \text{ Поэтому } \sin\frac{\pi x}{18} \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi x}{18} \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right),$$

$$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in (-6+18k; 6+18k) = [-5+18k; 5+18k], \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Решения на отрезке } [-18; 18]$$

симметричны, и их сумма равна нулю. В ответ войдет сумма

$$19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 31 = 136.$$

::3.2:: Решите неравенство $\sqrt{7 + 8 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{18} \right)} > 4 \cos^2 \frac{\pi x}{18}$. В ответ впишите сумму

всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 35]$.

Ответ: 297.

::3.3:: Решите неравенство $\sqrt{7 + 8 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{12} \right)} > 4 \cos^2 \frac{\pi x}{12}$. В ответ впишите сумму

всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-12; 25]$.

Ответ: 126.

::3.4:: Решите неравенство $\sqrt{7 + 8 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{12} \right)} > 4 \sin^2 \frac{\pi x}{12}$. В ответ впишите сумму

всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-12; 21]$.

Ответ: 63.

::4.1:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2015} . Найдите все целые значения k , при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений k . Если таких значений k нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2015. **Решение.** Обозначим $k - 2015 = p$. При положительных p

рассмотрим уравнение $\frac{2^p (2^{pn} - 1)}{2^p - 1} = 2016 = 2^5 \cdot 63$. При $p \in [1; 4]$ получим

$2^{pn} - 1 = 2^{5-p} \cdot 63 \cdot (2^p - 1)$ – левая часть уравнения нечетная, правая – четная. При $p = 5$

получаем $2^{5n} = 63 \cdot 31 + 1 = 1954$ – целых решений нет. При $p \geq 6$ получим

$2^{p-5} (2^{pn} - 1) = 63 \cdot (2^p - 1)$ – левая часть уравнения четная, правая – нечетная.

При $p \leq -1$ сумма прогрессии не превышает $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < 1$. И только при $p = 0$

(то есть при $k = 2015$) все члены прогрессии равны 1, и сумма первых 2016 членов равна 2016.

::4.2:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2014} . Найдите все целые значения k , при которых сумма первых нескольких

членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений k . Если таких значений k нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2014.

::4.3:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2016} . Найдите все целые значения k , при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений k . Если таких значений k нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2016.

::4.4:: Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2017} . Найдите все целые значения k , при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений k . Если таких значений k нет, то в ответе укажите 0.

Ответ: 2017.

::5.1:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $13x + 48 = 13y + 3xy$.

Ответ: 48. **Решение.** $13x + 48 = 13y + 3xy \Leftrightarrow x(13 - 3y) = 13y - 48 \Leftrightarrow$

$x = -\frac{13y - 48}{3y - 13} = -\frac{13}{3} - \frac{25}{3(3y - 13)}$, поэтому $3x = -13 - \frac{25}{3y - 13}$. Значит, $(3y - 13)$ должно

быть делителем числа 25. Составим таблицу:

$3y - 13$	1	5	25	-1	-5	-25
$3y$	14	18	38	12	8	-12
y	-	6	-	4	-	-4
$3x$	-	-18	-	12	-	-12
x	-	-6	-	4	-	-4

Таким образом, решения уравнения: $(-4; -4)$; $(-6; 6)$; $(4; 4)$. Обозначим вершины получившегося треугольника: $A(-4; -4)$; $B(-6; 6)$; $C(4; 4)$. Так как точки A и C лежат

на биссектрисе первого и третьего координатного углов, а точка B – на биссектрисе второго координатного угла, то $BO \perp AC$. Очевидно, что $AO = OC$. Поэтому $\triangle ABC$ – равнобедренный, и его площадь равна $\frac{AC \cdot BO}{2} = 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 48$.

::5.2:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $13y + 48 = 13x + 3xy$.

Ответ: 48.

::5.3:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $25y + 72 = 25x + 8xy$.

Ответ: 24.

::5.4:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $25x + 72 = 25y + 8xy$.

Ответ: 24.

::5.5:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $17x + 45 = 17y + 5xy$.

Ответ: 30.

::5.6:: Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $17y + 45 = 17x + 5xy$.

Ответ: 30.

::6.1:: Даны 2015 уравнений: $x_1 + x_2 = -1007$, $x_2 + x_3 = -1006$, ..., $x_{1007} + x_{1008} = -1$, $x_{1008} + x_{1009} = 0$, $x_{1009} + x_{1010} = 1$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, ..., $x_{2014} + x_{2015} = 1006$, $x_{2015} + x_1 = 1007$.

Найдите x_{2014} .

Ответ: -1 . **Решение.** Сложив все уравнения, получим

$$2(x_1 + x_2 + \dots + x_{2014} + x_{2015}) = 0, \text{ откуда } x_1 + x_2 + \dots + x_{2014} + x_{2015} = 0.$$

Сложив 1-ое, 3-е, 5-ое, ..., 2013-ое уравнения, получим $x_1 + x_2 + \dots + x_{2014} = -1007 - 1005 - \dots + 1003 + 1005 = -1007$. Следовательно, $x_{2015} = 1007$. Тогда из уравнения $x_{2014} + x_{2015} = 1006$ находим, что $x_{2014} = -1$.

::6.2:: Даны 2017 уравнений: $x_1 + x_2 = -2016$, $x_2 + x_3 = -2014$, ..., $x_{1008} + x_{1009} = -2$, $x_{1009} + x_{1010} = 0$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, $x_{1011} + x_{1012} = 4$, ..., $x_{2016} + x_{2017} = 2014$, $x_{2017} + x_1 = 2016$.

Найдите x_{2017} .

Ответ: 2016.

::6.3:: Даны 2015 уравнений: $x_1 + x_2 = -1007$, $x_2 + x_3 = -1006$, ..., $x_{1007} + x_{1008} = -1$, $x_{1008} + x_{1009} = 0$, $x_{1009} + x_{1010} = 1$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, ..., $x_{2014} + x_{2015} = 1006$, $x_{2015} + x_1 = 1007$.

Найдите x_{2015} .

Ответ: 1007.

::6.4:: Даны 2017 уравнений: $x_1 + x_2 = -2016$, $x_2 + x_3 = -2014$, ..., $x_{1008} + x_{1009} = -2$, $x_{1009} + x_{1010} = 0$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, $x_{1011} + x_{1012} = 4$, ..., $x_{2016} + x_{2017} = 2014$, $x_{2017} + x_1 = 2016$.

Найдите x_{2016} .

Ответ: -2 .

::6.5:: Даны 2015 уравнений: $x_1 + x_2 = -1007$, $x_2 + x_3 = -1006$, ..., $x_{1007} + x_{1008} = -1$, $x_{1008} + x_{1009} = 0$, $x_{1009} + x_{1010} = 1$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, ..., $x_{2014} + x_{2015} = 1006$, $x_{2015} + x_1 = 1007$.

Найдите x_2 .

Ответ: -1007 .

::6.6:: Даны 2017 уравнений: $x_1 + x_2 = -2016$, $x_2 + x_3 = -2014$, ..., $x_{1008} + x_{1009} = -2$,
 $x_{1009} + x_{1010} = 0$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, $x_{1011} + x_{1012} = 4$, ..., $x_{2016} + x_{2017} = 2014$, $x_{2017} + x_1 = 2016$.

Найдите x_2 .

Ответ: -2016 .

::7.1:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 10 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 20 точек нужно выбрать 9 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 420. **Решение.** Пусть $N = 10$ – количество отмеченных точек на одной прямой. В силу требования задачи на одной прямой нельзя выбрать более чем n точек, где $n = N/2$, если N четно, и $n = (N+1)/2$, если N нечетно (в данном варианте $n = 5$). Так как всего выбирается 9 точек, то на одной прямой будет 5 точек, а на другой – 4.

Выясним, сколькими способами можно выбрать k точек из отмеченных N на одной прямой. Описанный способ выбора, по сути, означает разбиение отрезка длины $N-1$ на $k+1$ отрезков целочисленной длины, среди которых $k-1$ средних должны быть не короче 2 см. Иными словами, надо найти количество решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = N-1$ в целых числах, причем $x_1, x_{k+1} \geq 0$, $x_2, \dots, x_k \geq 2$.

Положим $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 - 1$, ..., $y_k = x_k - 1$, $y_{k+1} = x_{k+1} + 1$. Тогда задача сводится к нахождению количества решений уравнения $y_1 + y_2 + \dots + y_k + y_{k+1} = N - k + 1$ в натуральных числах. Эта задача равносильна, например, выставлению k перегородок между $N - k + 1$ лежащими на одной прямой шарами – число решений равно C_{N-k+1}^k .

В задаче этого варианта число решений равно $2C_7^4 \cdot C_6^5 = 2 \cdot 35 \cdot 6 = 420$.

::7.2:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 12 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 24 точек нужно выбрать 11 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 784.

::7.3:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 9 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 18 точек нужно выбрать 8 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 295.

::7.4:: На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 11 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 22 точек нужно выбрать 10 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 581.

::8.1:: В треугольник ABC площади 25 вписана окружность с центром O , касающаяся сторон AB , BC и AC в точках L , M и N соответственно. При этом $AN : NC = 3 : 7$. Найдите площадь треугольника AND , где D – точка пересечения прямых AO и NM . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,75. **Решение.** 1) Пусть EF – средняя линия треугольника ABC (E лежит на AB , F – на BC). Пусть P – точка пересечения NM и этой средней линии. Обозначим $CM = CN = x$, $AL = AN = y$, $BL = BM = z$. Тогда $FP = FM$ (из подобия треугольников MFP и MCN) $= \frac{z+x}{2} - z = \frac{x-z}{2}$. Значит, $EP = EF - FP = \frac{x+y}{2} - \frac{x-z}{2} = \frac{y+z}{2} = \frac{AB}{2}$.

2) Поэтому $\angle EPA = \angle EAP$ (углы в равнобедренном треугольнике EAP); $\angle EPA = \angle PAN$ (параллельность EP и AC). Значит, AP – биссектриса, т. е. AO и NM пересекаются в точке P , лежащей на средней линии.

3) Таким образом, высота треугольника AND равна половине высоты треугольника ABC . Значит, его площадь относится к площади ABC как $\frac{3}{3+7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$.

::8.2:: В треугольник ABC площади 24 вписана окружность с центром O , касающаяся сторон AB , BC и AC в точках L , M и N соответственно. При этом $AN : NC = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника AND , где D – точка пересечения прямых AO и NM . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 3.

::8.3:: В треугольник ABC вписана окружность с центром O , касающаяся сторон AB , BC и AC в точках L , M и N соответственно. Прямые AO и NM пересекаются в точке D . При этом $AN : NC = 1 : 2$, а площадь треугольника AND равна 2. Найдите площадь треугольника ABC . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 12.

::8.4:: В треугольник ABC вписана окружность с центром O , касающаяся сторон AB , BC и AC в точках L , M и N соответственно. Прямые AO и NM пересекаются в точке D . При этом $AN : NC = 1 : 3$, а площадь треугольника AND равна 3. Найдите площадь треугольника ABC . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 24.

::8.5:: В треугольник ABC вписана окружность с центром O , касающаяся сторон AB , BC и AC в точках L , M и N соответственно. Прямые AO и NM пересекаются в точке D . При этом $AN : NC = 2 : 3$, а площадь треугольника AND равна 4. Найдите площадь треугольника ABC . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 20.

::9.1:: Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0$ и $ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0$. Выберите среди этих значений a наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 2,08. **Решение.** Множество решений каждого из этих двух неравенств может представлять собой отрезок, объединение двух замкнутых непересекающихся лучей, замкнутый луч, прямую, точку или пустое множество. Значит, по условию задачи возможны две ситуации.

1) Решение одного из неравенств единственное, и оно удовлетворяет второму неравенству. Здесь, в свою очередь, возможны два случая:

а) $a^2 - (a-1)(a+4) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$. Тогда $x = -4$. При этом значении a второе

неравенство имеет решения (два непересекающихся луча), и $x = -4$ входит в это решение;

б) $(a+1)^2 - a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Тогда $x = 0$, но первое неравенство не выполнено.

2) Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, то есть система $\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0 \end{cases}$ имеет решения. Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -3. \end{cases}$

Если $x = -3$, то $9a - 2(a+1)3 + a + 1 = 0$, то есть $a = \frac{5}{4}$. При этом значении a решения системы $-7 \leq x \leq -3$.

Если $x = 1$, то $a + 2(a+1) + a + 1 = 0$, то есть $a = -\frac{3}{4}$. При этом значении a система имеет единственное решение $x = 1$.

3) Можно еще отдельно проверить $a = 0$ и $a = 1$, они условию не удовлетворяют.

Окончательно получаем: $a = -\frac{3}{4}$ и $a = \frac{4}{3}$. Искомая величина: $\frac{4}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{25}{12} \approx 2,08$.

::9.2:: Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(a-2)x^2 + 2ax + a + 8 \leq 0$ и $ax^2 + 2(a+2)x + a + 2 \geq 0$. Выберите среди этих значений a наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 4,17.

::9.3:: Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(a+2)x^2 + 2ax + a - 8 \geq 0$ и $ax^2 + 2(a-2)x + a - 2 \leq 0$. Выберите среди этих значений a наибольшее и наименьшее и в

ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 4,17.

::9.4:: Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(2a-1)x^2 + 4ax + 2a + 4 \leq 0$ и $2ax^2 + 2(2a+1)x + 2a + 1 \geq 0$. Выберите среди этих значений a наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

Ответ: 1,04.

::10.1:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 6$ и $DD_1 = \frac{20}{7}$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,21. **Решение.** Продлим ребра усечённой пирамиды до пирамиды $SABC$ (см. рис. 1).

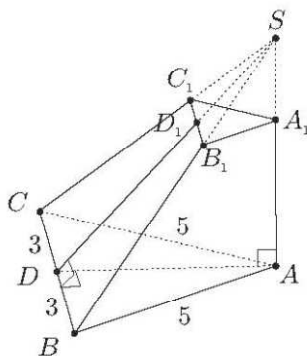


Рис. 1

Обозначим $h = SA$. Тогда шар, вписанный в усечённую пирамиду, также вписан и в пирамиду $SABC$. Поэтому $V = \frac{1}{3}h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}r \cdot S_{\text{полн. пов.}}$. (1)

Поскольку $S_{\Delta ABC} = 12$, то $S_{\text{полн. пов.}} = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta ABC} = 5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12$.

Значит, равенство (1) равносильно $12h = r \cdot (5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12)$. (2)

Из точки D_1 опустим перпендикуляр D_1E на плоскость основания ABC (рис. 2).

Обозначим $\alpha = \angle D_1DA$. Из ΔSDA следует, что $\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4^2}}$. Тогда из ΔD_1ED

находим $D_1E = 2r = \frac{20}{7} \sin \alpha = \frac{20h}{7\sqrt{h^2 + 4^2}}$.

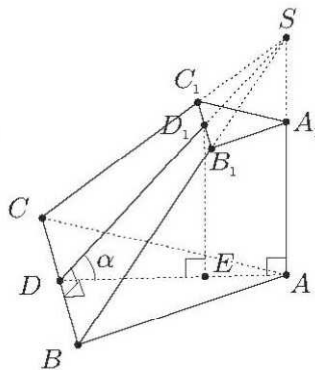


Рис. 2

Подставляя в (2) значение для r , получаем: $12h = \frac{10h}{7\sqrt{h^2 + 4^2}} \cdot (5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12)$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{5}{7\sqrt{h^2 + 4^2}} \cdot (5h + 3 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 12) \Leftrightarrow 42\sqrt{h^2 + 4^2} = 25h + 15 \cdot \sqrt{4^2 + h^2} + 60 \Leftrightarrow$$

$$27\sqrt{h^2 + 4^2} = 25h + 60 \Leftrightarrow 104h^2 - 3000h + 8064 = 0 \Leftrightarrow h = 3 \text{ или } h = \frac{336}{13}.$$

Используя равенство $r = \frac{10h}{7\sqrt{h^2 + 4^2}}$, находим: $r_1 = 6/7$ или $r_2 = 24/17$.

Искомое произведение равно $r_1 \cdot r_2 = \frac{144}{119} \approx 1,21$.

::10.2:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC , $AB = AC = 10$, $BC = 12$ и $DD_1 = \frac{40}{7}$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,84.

::10.3:: В усеченной треугольной пирамиде $K_1L_1M_1KLM$ ребро KK_1 перпендикулярно плоскости большего основания KLM , $KL = KM = 15$, $LM = 18$ и $PP_1 = \frac{60}{7}$, где P и P_1 – середины отрезков LM и L_1M_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 10,89.

::10.4:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC , $AB = AC = 35$, $BC = 42$ и $DD_1 = 20$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 59,29.

::10.5:: В усеченной треугольной пирамиде $K_1L_1M_1KLM$ ребро KK_1 перпендикулярно плоскости большего основания KLM , $KL = KM = 25$, $LM = 30$ и $PP_1 = \frac{100}{7}$, где P и P_1 – середины отрезков LM и L_1M_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые

может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 30,25.

::10.6:: В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC , $AB = AC = 70$, $BC = 84$ и $DD_1 = 40$, где D и D_1 – середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 237,18.



2015/2016 учебный год
КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ¹

олимпиады школьников
«ЛОМОНОСОВ»
по математике
10-11 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **60** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **80** баллов до **89** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **65** баллов до **79** баллов включительно.*

¹ Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике