МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по математике

2015/2016 учебный год

http://olymp.msu.ru

1) Отборочный этап 10-11 класс первый отборочный тур:

::1.1:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 198 пряников, 462 конфет и 132 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 66. **Решение.** Так как $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ и $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, то наибольшее количество подарков равно $\text{НОД}\left(132,\ 198,\ 462\right) = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$ (подарков).

::1.2:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 462 пряников, 539 конфет и 308 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 77.

::1.3:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 234 пряников, 273 конфет и 156 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 39.

::1.4:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 273 пряников, 637 конфет и 182 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 91.

::1.5:: Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 234 пряников, 546 конфет и 156 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

Ответ: 78.

::2.1:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$, если $a=\pi$, а b и c – корни уравнения $2015x^2-2015x+2=0$.

Ответ: 503,75. **Решение.** Вычисляем по очереди: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1}$ $=\frac{a+b+c}{a(b+c)}:\frac{b+c-a}{a(b+c)}=\frac{a+b+c}{b+c-a}$; $1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$.

Поэтому при всех допустимых значениях переменных выражение равно:

$\frac{(a+b+c)^2(b+c-a)}{2bc(b+c-a)(a+b+c)^2}=\frac{1}{2bc}$. Так как по теореме Виета $bc=\frac{2}{2015}$, то получаем ответ: $\frac{2015}{4}=503,75$.

::2.2:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{-1}\frac{(a+b+c)^2}{2}$, если $a=2\pi$, а b и c – корни уравнения $2x^2-2015x+2015=0$.

Ответ: 1007,5.

::2.3:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$, если $a=3\pi$, а b и c – корни уравнения $2015x^2-2016x+2=0$.

Ответ: 1007,5.

::2.4:: Найдите значение выражения

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{-1}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$, если $a=4\pi$, а b и c – корни уравнения $2x^2-2016x+2015=0$.

Ответ: 503,75.

::3.1:: На окружности пытаются разместить 20 черных и 50 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 680. **Решение.** Треугольник прямоугольный, если его сторона проходит через центр окружности. Чтобы получить максимум треугольников, нужно чтобы все 70 вершин разбились на пары диаметрально противоположных. Пусть среди них оказалось m пар разноцветных вершин, тогда $m = 2x$ — четно (если оно есть $m = 2x - 1$, то увеличим его на 1, отчего число искомых треугольников только увеличится) и разобьем все остальные вершины на пары одноцветных: $(20-2x)/2 = 10 - x$ черных и $(50-2x)/2 = 25 - x$ белых. Третьей вершиной может быть любая из оставшихся черных, поэтому число искомых треугольников будет равно:
$2x \cdot (20-1) + (10-x) \cdot (20-2) + (25-x) \cdot 20 = 680$.

::3.2:: На окружности пытаются разместить 20 черных и 40 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 580.

::3.3:: На окружности пытаются разместить 30 черных и 20 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 720.

::3.4:: На окружности пытаются разместить 40 черных и 10 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 960.

::3.5:: На окружности пытаются разместить 21 черную и 15 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 357.

::3.6:: На окружности пытаются разместить 11 черных и 45 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 297.

::3.7:: На окружности пытаются разместить 15 черных и 41 белую точку так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 405.

::3.8:: На окружности пытаются разместить 25 черных и 21 белую точку так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

Ответ: 550.

::4.1:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 16 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 19200. **Решение.** Обозначим первую цифру данного четырёхзначного числа через x, а остающееся после отбрасывания этой цифры трёхзначное число – через y. Тогда по условию: $1000x + y = 16y$, или $200x = 3y$. Поэтому возможны варианты: $x = 3$, $y = 200$; $x = 6$, $y = 400$; $x = 9$, $y = 600$. Получающиеся числа: 3200, 6400, 9600.

::4.2:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 13 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 19500.

::4.3:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 11 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 49500.

::4.4:: Найдите все четырёхзначные числа, которые уменьшаются в 17 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 21250.

::5.1:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ на основании *AC* выбрана точка *N* так, что $AN : NC = 2:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников *ABN* и *CBN*. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,09. **Решение**. а) Из теоремы синусов для треугольников *ABN* и *CBN* следует, что радиусы указанных описанных окружностей равны. Обозначим центры этих окружностей соответственно через O_1 и O_2, а их радиусы через *R*.

б) Четырехугольник O_1BO_2N – ромб со стороной *R* и углом при вершине *B*, равным углу при вершине исходного равнобедренного треугольника ($\angle BO_1O_2$ – половина центрального угла и равен углу $\angle A$, а $\angle BO_2O_1$ – половина центрального угла и равен углу $\angle C$). Треугольники *ABC* и O_1BO_2 подобны.

в) Отрезок *BN* находится из теоремы косинусов для треугольника *ABN* $\left(\cos\angle A = \frac{3}{5}\right)$: $BN = \sqrt{17}$. Из подобия треугольников или с использованием тригонометрических функций $\left(\operatorname{ctg}\angle A = \frac{3}{4}\right)$ получаем ответ $O_1O_2 = BN \cdot \operatorname{ctg}\angle A = \frac{3\sqrt{17}}{4}$ $\approx 3{,}09$.

::5.2:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{13}$, $AC = 6$ на основании *AC* выбрана точка *N* так, что $AN : NC = 2:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников *ABN* и *CBN*. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,35.

::5.3:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = 3\sqrt{2}$, $AC = 6$ на основании *AC* выбрана точка *N* так, что $AN : NC = 2:1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,16.

::5.4:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{10}$, $AC = 6$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 2 : 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,24.

::5.5:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 8$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3 : 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,81.

::5.6:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{17}$, $AC = 8$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3 : 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 8,94.

::5.7:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{5}$, $AC = 4$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3 : 2$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,15.

::5.8:: В треугольнике со сторонами $AB = BC = \sqrt{29}$, $AC = 10$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 3 : 2$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 5,59.

::6.1:: Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 0,5. **Решение.** $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq y\geq 0, \\ x+y-2\sqrt{xy}=2xy+\frac{1}{2}. \end{cases}$ Уравнение $x+y-2\sqrt{xy}=2xy+\frac{1}{2}$ равносильно $\frac{x+y}{2}=xy+\sqrt{xy}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}=\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\sqrt{\frac{x+y}{2}}=\sqrt{xy}+\frac{1}{2}$, поэтому $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}=\frac{1}{2}$.

::6.2:: Найдите наименьшее значение величины $\sqrt{2(x+y)}-2\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 1.

::6.3:: Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{2(x+y)}-2\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 1.

::6.4:: Найдите наименьшее значение величины $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 0,5.

::6.5:: Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$.

Ответ: 0,5.

::7.1:: Решите уравнение $5\sin\left(2x+\arcsin\frac{4}{5}\right)+\sqrt{10}\cos\left(x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=7$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{13\pi}{6}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 6,28. **Решение:** Так как $\sin\left(2x+\arcsin\frac{4}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x-\arccos\frac{3}{5}\right)$ $=\cos\left(2\left(x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right)$, то, обозначив $\alpha=x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$, получим $5\cos 2\alpha+\sqrt{10}\cos\alpha=7$, или $10\cos^2\alpha+\sqrt{10}\cos\alpha-12=0$. Отсюда $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ или $\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{10}}{10}$ (что невозможно, так как $-\frac{4\sqrt{10}}{10}<-1$). Поэтому $\cos\left(x-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, откуда получаются решения: $x=2\pi n$, $2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}+2\pi n$. При этом в указанный в условии промежуток попадает только 2π, так как $2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}>\frac{\pi}{6}\ \Leftrightarrow\ \sin\left(2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$.

::7.2:: Решите уравнение $\sqrt{10}\sin\left(x-\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\right)-5\sin\left(2x-\arccos\frac{3}{5}\right)=7$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: $-3{,}14$.

::7.3:: Решите уравнение $5\sin\left(2x+\arccos\frac{4}{5}\right)+8\sqrt{5}\sin\left(x-\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=11$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(\frac{7\pi}{3};\frac{7\pi}{2}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: 9,42.

::7.4:: Решите уравнение $8\sqrt{5}\cos\left(x-\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-5\sin\left(2x-\arcsin\frac{3}{5}\right)=11$. В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{5\pi}{2};-\frac{4\pi}{3}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Ответ: $-6,28$.

::8.1:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=12\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 12 (или 16). **Решение.** Рёбра оснований равны $12\sqrt{2}$, диагональ основания равна $AC=BD=24$, поэтому $BQ=12$ и боковые рёбра равны 18.

1) Рассмотрим серию указанных сечений, пересекающих ребра AD и DC (см. рис. 1). Все эти сечения – треугольники, подобные треугольнику AEC, причем $QE \parallel BS$, QE – средняя линия в ΔBSD, поэтому $QE=9$, $AE=\sqrt{QE^2+AQ^2}=\sqrt{81+144}=15$.

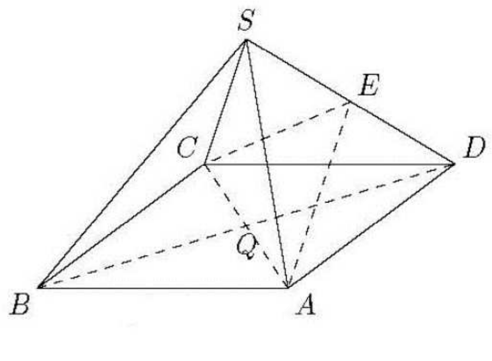

Рис. 1

Радиус вписанной в ΔAEC окружности равен отношению площади этого треугольника к его полупериметру: $r=\frac{12\cdot 9}{12+15}=4$. Значит, возможные значения радиусов окружностей, вписанных в треугольные сечения: $0<r<4$. Отметим, что само значение

$r = 4$ здесь исключено, так как сечение AEC проходит через AC, а не параллельно AC, как требуется по условию. (*См. примечание в конце решения*).

2). Рассмотрим теперь серию указанных сечений, пересекающих ребра AB и BC (см. рис. 2). Все эти сечения – пятиугольники. Пусть сечение проходит через точку T, лежащую на BQ, и $BT = x$ $(0 < x < 12)$. Тогда $FR \parallel GH \parallel SB$ и, так как $AC \perp SB$, то $FR \perp GF$.

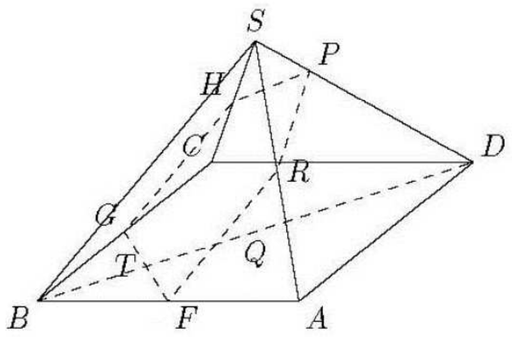

Рис. 2

Таким образом, каждый такой пятиугольник $GFRPH$ представляет собой прямоугольник $GFRH$ с равнобедренной треугольной «крышкой» RPH (рис. 3).

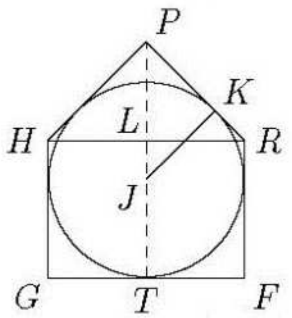

Рис. 3

Из ΔABS : $\dfrac{FR}{BS} = \dfrac{AF}{AB}$, $\dfrac{FR}{18} = \dfrac{(12-x)\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = 1 - \dfrac{x}{12} \Rightarrow FR = 18 - \dfrac{3x}{2}$.

Из подобия ΔSBD и ΔPTD: $\dfrac{TP}{SB} = \dfrac{TD}{BD}$, $\dfrac{TP}{18} = \dfrac{24-x}{24} \Rightarrow TP = 18 - \dfrac{3x}{4}$.

Поэтому $LP = \dfrac{3x}{4}$ и, так как $HR = GF = 2x$, то $PR = \dfrac{5x}{4}$ и $\sin \angle LPR = \dfrac{4}{5}$.

Из ΔPKJ: $\sin \angle LPR = \frac{JK}{JP} = \frac{x}{18 - \frac{3x}{4} - x} = \frac{4x}{72 - 7x} = \frac{4}{5}$, откуда $x = 6$ и $r = 6$.

Таким образом, $r \in (0; 4) \cup 6$, и сумма целых значений: $1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

Замечание. Отметим, что в ряде книг параллельность прямой и плоскости трактуется не так, как в основных школьных учебниках. В частности, плоскость AEC в соответствии с этой трактовкой тоже является параллельной прямой AC. Поэтому было принято решение засчитывать как правильные также те ответы, в которые был включён и радиус $r = 4$. Таким образом, в данной задаче засчитывался как ответ 12, так и ответ 16.

::8.2:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 6\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SB, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 4 (или 6).

::8.3:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 18\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SA и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 24 (или 30).

::8.4:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 24\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SC и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 40 (или 48).

::8.5:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=6\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SC и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 4 (или 6).

::8.6:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=12\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной SA и BD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 12 (или 16).

::8.7:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=18\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SD, причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 24 (или 30).

::8.8:: В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a=24\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SB , причём так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

Ответ: 40 (или 48).

::9.1:: Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f\left(x\right)=14115\sin^2 x+10\cos^2 x+24180\sin 2x-6048\cos x-8064\sin x+8050$.

Ответ: 50380. **Решение.** Если сделать замену $t = 3\cos x + 4\sin x \in [-5; 5]$ и учесть, что $t^2 = 7\sin^2 x + 12\sin 2x + 9$, то задача сводится к исследованию множества значений функции $g(t) = 2015 \cdot t^2 - 2016 \cdot t - 5 \cdot 2015$ при $t \in [-5; 5]$. Минимум функции $g(t)$ достигается в точке $t_0 = \frac{1008}{2015} \in [-5;5]$, а максимум – в точке $t = -5$. Значит, $f_{\max} = g(-5) = 50380$.

::9.2:: Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14125\sin^2 x + 20\cos^2 x + 24180\sin 2x - 6048\cos x - 8064\sin x + 6025$.

Ответ: 48365.

::9.3:: Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14135\sin^2 x + 30\cos^2 x + 24180\sin 2x - 6048\cos x - 8064\sin x + 4000$.

Ответ: 46350.

::9.4:: Найдите минимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14100\cos^2 x - 5\sin^2 x - 24180\sin 2x + 6048\cos x + 8064\sin x - 16115$.

Ответ: -44335.

::9.5:: Найдите минимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14095\cos^2 x - 10\sin^2 x - 24180\sin 2x + 6048\cos x + 8064\sin x - 14095$.

Ответ: -42320.

::9.6:: Найдите минимальное число, принадлежащее множеству значений функции $f(x) = 14090\cos^2 x - 15\sin^2 x - 24180\sin 2x + 6048\cos x + 8064\sin x - 12075$.

Ответ: -40305.

::10.1:: Найдите все значения *y*, при каждом из которых ровно два целых значения *x* удовлетворяют неравенству $\sqrt{y^2 - x^4} > x - y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений *y*.

Ответ: -104. **Решение.** Неравенство равносильно совокупности двух систем:
$\begin{cases} y > x, \\ |y| \ge x^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \le x, \\ 2xy > x^4 + x^2. \end{cases}$

Первая из них равносильна совокупности $\begin{cases} y > x, \\ y \ge x^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y > x, \\ y \le -x^2. \end{cases}$

Введём функцию $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^3 + x\right)$, тогда вторая система приводит к совокупности:

$\begin{cases} y \le x, \\ x > 0, \\ y > f(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} y \le x, \\ x < 0, \\ y < f(x). \end{cases}$ При этом функция $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^3 + x\right)$ нечётная, возрастает на всей числовой прямой и $x^2 < f(x) < x$ при $x \in (0;1)$; $f(x) > x^2$ при $x > 1$.

Все эти совокупности для наглядности можно изобразить на плоскости Oxy. При этом получается, что при $y > 1$ неравенство имеет, по крайней мере, 3 целочисленных решения: $x = -1; 0; 1$; при $y = 1$ – целочисленных решений ровно два: $x = -1; 0$; при $y \in (0;1)$ – целочисленное решение ровно одно: $x = 0$; при $y \in [-1; 0]$ – целых решений нет. При $y < -1$ – целочисленные решения с ростом $|y|$ появляются «по очереди»: $x = -1$, $x = -2$, … Подставляя эти значения в исходное неравенство, получим, что $x = -1$ является корнем при $y < -1$, $x = -2$ – при $y < -5$, $x = -3$ – при $y < -15$. Таким образом, ровно два целочисленных решения будет при $y \in [-15; -5) \cup \{1\}$. Искомая сумма равна $-15 - 14 - 13 - \ldots - 7 - 6 + 1 = -104$.

::10.2:: Найдите все значения *y*, при каждом из которых ровно два целых значения *x* удовлетворяют неравенству $\sqrt{y^2 - x^6} > x - y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений *y*.

Ответ: -7472.

::10.3:: Найдите все значения *y*, при каждом из которых ровно одно целое значение *x* удовлетворяет неравенству $\sqrt{y^2 - x^6} > x + y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений *y*.

Ответ: 152.

::10.4:: Найдите все значения y, при каждом из которых ровно одно целое значение x удовлетворяет неравенству $\sqrt{y^2-4x^6}>2x+y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений y.

Ответ: 591.

::10.5:: Найдите все значения y, при каждом из которых ровно два целых значения x удовлетворяют неравенству $\sqrt{y^2-4x^4}>2x+y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений y.

Ответ: 408.

::10.6:: Найдите все значения y, при каждом из которых ровно одно целое значение x удовлетворяет неравенству $\sqrt{y^2-4x^4}>2x-y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений y.

Ответ: -51.