# МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

***олимпиады школьников***
***«ЛОМОНОСОВ»***
***по математике***

2015/2016 учебный год

http://olymp.msu.ru

4) Заключительный этап 10-11 классы.

## Олимпиада «Ломоносов – 2016».

### Решения и ответы варианта 2016-1; ответы ко всем вариантам

**1.** Незнайка прыгал от своего дома к дому Знайки. Три четверти пути он пропрыгал прыжками, длина которых равна двум его обычным шагам, а остальную четверть пути – прыжками, длина которых равна трем его обычным шагам. Оказалось, что прыжков в два шага оказалось на 350 больше, чем прыжков в три шага. Сколько обычных шагов от дома Знайки до дома Незнайки? Считаем, что все шаги у Незнайки одинаковые.

**Решение.** Пусть искомое расстояние равно $S$ шагов, тогда количество прыжков в два и три шага равно $\frac{3S}{4\cdot 2}$ и $\frac{S}{4\cdot 3}$ соответственно. Получаем соотношение $\frac{3S}{8}-\frac{S}{12}=350 \Leftrightarrow \frac{7S}{24}=350 \Leftrightarrow$ $S=1200$ (шагов).

**Ответ варианта 1:** 1200. **Ответ варианта 2:** 1800.

**Ответ варианта 3:** 2040. **Ответ варианта 4:** 900.

**Критерии оценивания:** *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – арифметическая ошибка при идейно верном решении.

**2.** Найдите все решения уравнения $\operatorname{arcctg}^2 x = 3\operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$.

**Решение.** Положим $t=\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2 = 3t^2+\frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow 2t^2+\pi t-\frac{2\pi^2}{9}=0$ $\Leftrightarrow t_1=-\frac{2\pi}{3},\ t_2=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Ответ варианта 1:** $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **Ответ варианта 2:** $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Ответ варианта 3:** $x=-1$. **Ответ варианта 4:** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Критерии оценивания:** *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – используется верное соотношение между тригонометрическими функциями, верно получено значение $t$, но неверно вычислена обратная тригонометрическая функция. Если дополнительно к верному получен посторонний корень, то за задачу выставляется оценка «0 баллов».

3. Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить $5/4$ всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид, работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате весь забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала все время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)

**Решение.** Обозначим через 1 всю работу по окраске забора, через $x$, $y$ и $z$ производительность Тома, Сида и Гека соответственно, а через $t_1$, $t_2$, $t_3$ – промежутки времени, в которые Том, Сид и Гек соответственно работали по одному. Тогда, по условию, $(y+z)t_1=\frac{1}{2}$, $(x+z)t_2=\frac{5}{4}$, $(x+y)t_3=\frac{1}{4}$, $xt_1+yt_2+zt_3=1$.

При этом найти нужно величину $(t_1+t_2+t_3):\frac{1}{x+y+z}=(x+y+z)(t_1+t_2+t_3)$. Раскрывая скобки, получим $xt_1+(y+z)t_1+yt_2+(x+z)t_2+zt_3+(x+y)t_3=1+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=3$.

**Ответ варианта 1:** в 3 раза.
**Ответ варианта 2:** в 4 раза.
**Ответ варианта 3:** в 2,5 раза.
**Ответ варианта 4:** в 1,5 раза.

**Критерии оценивания:** *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – арифметическая ошибка при идейно правильном решении.

4. В треугольнике $ABC$ точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ – середины сторон $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Найдите длину стороны $AC$, если известно, что сумма векторов $3\cdot\overline{AA_1}+4\cdot\overline{BB_1}+5\cdot\overline{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2;1)$.

**Решение.** Поскольку $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=(0;0)$, то $\overline{BB_1}+2\cdot\overline{CC_1}=(2;1)$.

Так как $\overline{CB_1}=\overline{CO}+\overline{OB_1}$ (здесь $O$ – точка пересечения медиан треугольника), то $\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}=\frac{2}{3}\cdot\overline{CC_1}+\frac{1}{3}\cdot\overline{BB_1}=\frac{1}{3}\cdot(2;1)$. Значит, $\overline{CA}=\frac{2}{3}\cdot(2;1)$, и $|\overline{CA}|=\frac{2\sqrt{2^2+1^2}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

**Ответ варианта 1:** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.
**Ответ варианта 2:** $\frac{2\sqrt{13}}{3}$.
**Ответ варианта 3:** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.
**Ответ варианта 4:** $\frac{2\sqrt{17}}{3}$.

**Критерии оценивания:** *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – арифметическая ошибка при идейно правильном решении.

**5.** Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5)-\log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right)-\cos(2x-1)\right)(|x-4|-|2x-5|)\geq 0.$$

**Решение.** Область определения входящих в неравенство функций: $x\in\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. При этих значениях $x$, во-первых, модули раскрываются однозначно, во-вторых, входящие в неравенство косинусы – монотонно возрастающие функции, так как их аргументы находятся в интервале $(\pi;\,2\pi)$: $\pi<\frac{17}{4}=\frac{5}{2}+\frac{7}{4}<x+\frac{7}{4}<\frac{7}{2}+\frac{7}{4}=\frac{21}{4}<2\pi$, $\pi<4=5-1<2x-1<7-1=6<2\pi$.

Кроме того, $\log_{\frac{\pi}{6}}t$ монотонно убывает. Поэтому исходное неравенство на области определения равносильно: $(2x-5-7+2x)(-1)\left(x+\frac{7}{4}-2x+1\right)(4-x-2x+5)\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\left(x-\frac{11}{4}\right)\leq 0$.

**Ответ варианта 1:** $\left(\frac{5}{2};\frac{11}{4}\right]\cup\{3\}$. **Ответ варианта 2:** $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]\cup\{2\}$.

**Ответ варианта 3:** $\left[-\frac{11}{4};-\frac{5}{2}\right)\cup\{-3\}$. **Ответ варианта 4:** $\left(\frac{7}{2};\frac{15}{4}\right]\cup\{4\}$.

**Критерии оценивания:** ***15 баллов*** – верное решение и верный ответ; ***10 баллов*** – идейно верное решение, но ответ отличается от правильного на одну точку.

**6.** Найдите произведение всех значений $x$, при каждом из которых $\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$, $2^{x^2-9x+11}$, $\left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$ — арифметическая прогрессия.

**Решение.** Так как это арифметическая прогрессия, то получаем:
$\sqrt{4-\sqrt{11}}^{\,x^2-9x+11}+\sqrt{4+\sqrt{11}}^{\,x^2-9x+11}=2\cdot 2^{x^2-9x+11}$. Это уравнение, если обозначить $f(t)=t^{\frac{x^2-9x+11}{2}}$, равносильно соотношению $\frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}=f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$. Но функция $t^{\alpha}$ при $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$ либо строго выпукла вверх, либо строго выпукла вниз (любая ненулевая хорда лежит либо выше, либо ниже дуги графика, которую она стягивает). Поэтому либо $x^2-9x+11=0$, либо $x^2-9x+11=2$. Оба уравнения очевидно имеют корни. По теореме Виета произведение корней равно $11\cdot 9=99$.

**Ответ варианта 1:** 99.

**Ответ варианта 2:** 120.

**Ответ варианта 3:** 143.

**Ответ варианта 4:** 80.

**Критерии оценивания:** *15 баллов* – верное решение и верный ответ; *10 баллов* – получен верный ответ, но обоснование имеет некоторые недостатки.

7. Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.

**Решение.** Если провести через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится три пары параллельных плоскостей. При их пересечении образуется параллелепипед, называемый описанным (или сопровождающим пирамиду). При этом из условия задачи следует, что в каждой грани диагонали равны между собой, то есть грани – прямоугольники. Значит, этот параллелепипед прямоугольный (рис. 1).

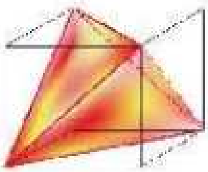

Рис. 1

Пусть ребра сопровождающего параллелепипеда равны $a$, $b$ и $c$. Объем пирамиды составляет третью часть от объема этого параллелепипеда, то есть $V = \frac{abc}{3}$.

Так как $x^2 + y^2 \ge 2xy$ и $\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$ (при этом равенство в каждом из этих неравенств достигается тогда и только тогда, когда $x = y$ и $x = y = z$ соответственно), то:

$$18\sqrt{2} = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \ge 3\sqrt{2}\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}}{3} \ge 3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}.$$

Отсюда $V \le \frac{6^3}{3} = 72$, причем это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

**Ответ варианта 1:** 72.

**Ответ варианта 2:** $18\sqrt{2}$.

**Ответ варианта 3:** 9.

**Ответ варианта 4:** $36\sqrt{2}$.

**Критерии оценивания:** ***15 баллов*** – верное решение и верный ответ; ***10 баллов*** – получен верный ответ, но отсутствует доказательство обращения неравенства в равенство; ***10 баллов*** – получен верный ответ, но имеются недостатки в обосновании.

**8.** Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

**Решение.** Выберем все нечётные числа от 673 до 2015, их количество равно

$\frac{2015-671}{2}=672$. Ни одно из этих чисел не делится на другое, так как при делении должно было бы получиться нечётное число, которое не меньше 3, но $673\cdot 3>2015$.

Покажем, что больше 672 чисел, удовлетворяющих условию задачи, выбрать нельзя. В самом деле, разобьём все нечётные числа от 17 до 2015 на 672 кучки, порождённые выбранными выше числами и включающие порождающее число и все его делители, при делении на которые получаются степени тройки: {2015}, {2013, 671}, {2011}, {2009}, {2007, 669, 223}, …, {675, 225, 75, 25}, {673}. Если выбрать больше, чем 672 числа, то по принципу Дирихле хотя бы два из них окажутся в одной кучке, а значит, одно из них будет делиться на другое.

Заметим, что выбранный набор из 672 чисел не единственный. Например, если в нём заменить число $2013=671\cdot 3$ на 671, то новый набор тоже будет удовлетворять условию задачи.

**Ответ варианта 1:** 672. Подходит, например, набор 673, … , 2015.

**Ответ варианта 2:** 667. Подходит, например, набор 669, … , 1999.

**Ответ варианта 3:** 673. Подходит, например, набор 673, … , 2017.

**Ответ варианта 4:** 670. Подходит, например, набор 671, … , 2009.

**Критерии оценивания:** ***15 баллов*** – верное решение и верный ответ; ***10 баллов*** – получен верный ответ и приведен верный пример, но нет доказательства того, что нельзя выбрать больше чисел.

**2015/2016 учебный год**

**КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ**[1]

**олимпиады школьников**

# «ЛОМОНОСОВ»

## по математике

*10-11 классы*

## ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **60** баллов до **90** баллов включительно.*

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **80** баллов до **89** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **65** баллов до **79** баллов включительно.*

---

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике*