Заключительный этап. 9 класс.

1. В некоторой стране алфавит состоит из трёх букв: «М», «Г» и «У». Словом называется любая состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержат каждую из трёх букв хотя бы по разу?

2. График квадратичной функции $f(x) = x^2+2px-p^2+7p-2015$ пересекает координатные оси в трех точках: A, B и C. Найдите значение p, при котором произведение длин отрезков $OA \times OB \times OC$ будет наименьшим.

3. В треугольнике $\triangle ABC$, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM, BN и CK. Найдите длину основания AB, если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

4. Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:
   a) Из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины так, чтобы получившаяся разность стала «хорошей».
   b) Из «хорошего» числа нельзя вычесть не более половины, так, чтобы оно осталось «хорошим».
   Известно, что число 1 — «хорошее». Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и BCD равны, а площадь ACD равна половине площади ABD. Найдите длину отрезка CM, где M — середина стороны AB, если известно, что $AD = 12$.

6. Последовательность задана рекуррентным соотношением: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 3$. Может ли число $a_{2015} - a_{2011} - 39$ быть простым?

7. Найдите решение системы в натуральных числах $\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2) \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2) \end{cases}$