Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10–11 класса

Вариант 151

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y=\left(\arcsin\left(\sin\left(\arccos\left(\cos 3x\right)\right)\right)\right)^{-5}.$$

3. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *DB* перпендикулярны сторонам *DC* и *AB* соответственно. Из точки *B* проведён перпендикуляр на сторону *AD*, пересекающий *AC* в точке *O*. Найдите *AO*, если $AB=4$, $OC=6$.

4. Найдите наибольшее значение $x+y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \ge 1.$$

5. Отрезок $AB=8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки *A* и *B* и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального *n* и для любого набора чисел x_1, x_2, …, x_n из отрезка $[0;3]$ уравнение $\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|=an$ имеет решение *x*, принадлежащее отрезку $[0;3]$. Укажите, какие из следующих значений *a* удовлетворяют этому условию:

a) $a=0$, b) $a=\frac{3}{2}$, c) $a=2$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{1}{3}$?

8. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

9 *марта 2015 г.*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10−11 класса

Вариант 152

1. В ящике лежат 120 разноцветных шариков: 31 красный, 24 зелёных, 29 жёлтых, 21 синий и 15 белых. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 25 шариков одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y=\left(\arcsin\left(\sin\left(\arccos\left(\cos 4x\right)\right)\right)\right)^{-3}.$$

3. Из вершины L выпуклого четырёхугольника $KLMN$ проведён перпендикуляр на сторону KN, пересекающий диагональ KM в точке O так, что $KO=3$. Найдите OM, если $KL=6$, $NL\perp KL$, $KM\perp MN$.

4. Найдите наименьшее значение $x-y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}}(-x)\geq 1.$$

5. Отрезок $MN=16$ пересекает плоскость α под углом 60° и делится этой плоскостью в отношении $1:7$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M и N и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел x_1, x_2, …, x_n из отрезка $[0;4]$ уравнение $\sum\limits_{i=1}^{n}|x-x_i|=an$ имеет решение x, принадлежащее отрезку $[0;4]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

a) $a=1$, b) $a=2$, c) $a=4$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 2, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{1}{4}$?

8. Петя, скучая на уроке математики, проделал с некоторым 2016-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа он отбросил последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавил удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом он опять проделал ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Пети числа перестали меняться, и тогда он остановился.

а) Какое число оказалось у Пети в конце?

б) Какое наибольшее число могло быть у Пети в самом начале (укажите две его последние цифры)?

9 *марта 2015 г.*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10–11 класса

Вариант 153

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 26 красных, 22 зелёных, 18 жёлтых, 13 синих, 11 белых и 10 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 17 шариков одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y=\left(\arcsin\left(\sin\left(\arccos\left(\cos 6x\right)\right)\right)\right)^{-1}.$$

3. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *DB* перпендикулярны сторонам *DC* и *AB* соответственно. Из точки *B* проведён перпендикуляр на сторону *AD*, пересекающий *AC* в точке *O*. Найдите *AO*, если $AB=2$, $OC=3$.

4. Найдите наименьшее значение $x+y$, если числа *x* и *y* удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}}(-y)\geq 1.$$

5. Отрезок $AB=10$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1:4$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки *A* и *B* и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального *n* и для любого набора чисел x_1, x_2, …, x_n из отрезка $[0;5]$ уравнение $\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|=an$ имеет решение *x*, принадлежащее отрезку $[0;5]$. Укажите, какие из следующих значений *a* удовлетворяют этому условию:

а) $a=1$, b) $a=\frac{5}{2}$, c) $a=5$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 12, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{3}{8}$?

8. Миша, скучая на уроке математики, проделал с некоторым 2016-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа он отбросил последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавил удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом он опять проделал ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Миши числа перестали меняться, и тогда он остановился.

а) Какое число оказалось у Миши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Миши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

9 *марта 2015 г.*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2014/2015 учебного года для 10–11 класса

Вариант 154

1. В ящике лежат 120 разноцветных шариков: 30 красных, 19 зелёных, 32 жёлтых, 21 синий и 18 белых. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 21 шарика одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y=\left(\arcsin\left(\sin\left(\arccos\left(\cos 4x\right)\right)\right)\right)^{-7}.$$

3. Из вершины L выпуклого четырёхугольника $KLMN$ проведён перпендикуляр на сторону KN, пересекающий диагональ KM в точке O так, что $KO=4$. Найдите OM, если $KL=8$, $NL\perp KL$, $KM\perp MN$.

4. Найдите наибольшее значение $x-y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} x \geq 1.$$

5. Отрезок $MN=12$ пересекает плоскость α под углом 60° и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M и N и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел x_1, x_2, …, x_n из отрезка $[0;6]$ уравнение $\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|=an$ имеет решение x, принадлежащее отрезку $[0;6]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию:

а) $a=0$, b) $a=3$, c) $a=4$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 8, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{1}{4}$?

8. Аня, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Ани числа перестали меняться, и тогда она остановилась.
а) Какое число оказалось у Ани в конце?
б) Какое наибольшее число могло быть у Ани в самом начале (укажите две его последние цифры)?

9 *марта 2015 г.*