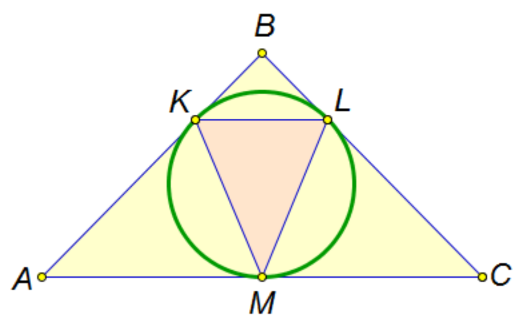
Отборочный этап. 9 класс.

1. В 12:00 плот отправился из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки. В 12:45 моторная лодка отправилась из A вслед за плотом, догнала плот в 13:00 и продолжила движение. Прибыв в пункт B, лодка развернулась и поплыла обратно, встретив по пути плот в 14:00. Определите время прибытия плота в пункт B.

   Ответ: 15:00. **Решение.** Лодка догнала плот за 15 минут, следовательно, ее скорость по течению в 4 раза больше скорости течения реки. Если рассмотреть систему координат, связанную с плотом, то несложно понять, что лодка прибыла в пункт B в 13:30, т.е. потратила 45 минут на путь из A в B. Соответственно плот потратит в 4 раза больше времени и прибудет в 15-00.

2. В равнобедренный треугольник со сторонами $AB = BC = 3$, $AC = 4$ вписана окружность, касающаяся сторон треугольника в точках K, L и M. Найдите отношение площадей $S(\triangle ABC) : S(\triangle KLM)$.

   Ответ: $\frac{9}{2}$. **Решение.** Поскольку треугольник равнобедренный, то вписанная окружность касается основания в середине, поэтому $AM = MC = AK = CL = 2$, $BK = BL = 1$. Найдем площади треугольников (по отношению к площади $\triangle ABC$): $S(\triangle AKM) = S(\triangle CLM) = \frac{1}{3}S(\triangle ABC)$, $S(\triangle BKL) = \frac{1}{9}S(\triangle ABC)$. Таким образом, площадь оставшейся части



   $S(\triangle KLM) = \frac{2}{9}S(\triangle ABC)$.

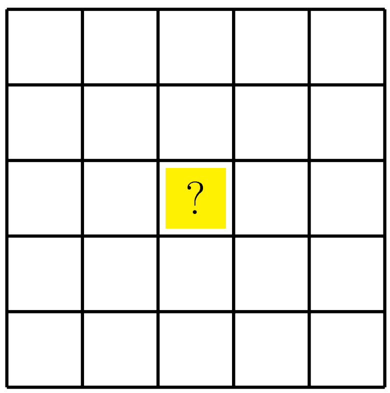
3. Найдите сумму

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{1}+\sqrt{2})} + \frac{1}{(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(\sqrt[4]{9999}+\sqrt[4]{10000})(\sqrt{9999}+\sqrt{10000})}.$$

Ответ: 9. **Решение.** Если домножить числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ на $\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n+1}$, получим $\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}$. Указанная сумма преобразуется к $(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{1})+(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})+\ldots+(\sqrt[4]{10000}-\sqrt[4]{9999}) = \sqrt[4]{10000}-\sqrt[4]{1}=9$.

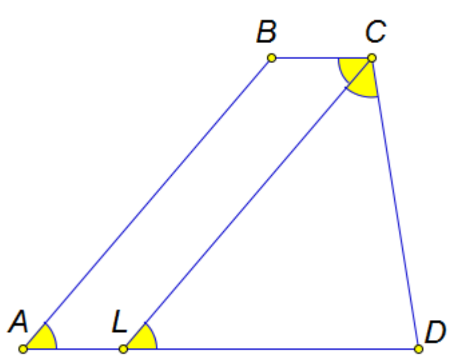
4. В таблице 5x5 расставлены числа (не обязательно целые), причем каждое число в три раза меньше числа, стоящего в соседней клетке справа, и в два раза больше числа, стоящего в соседней клетке снизу. Найдите число, стоящее в центральной клетке, если известно, что сумма всех чисел в таблице равна 11.



Ответ: $\frac{36}{341}$. **Решение.** Обозначим число, стоящее в левом нижнем углу за x. Получим уравнение $x(1+2+4+8+16)(1+3+9+27+81)=11$, откуда $x=\frac{1}{341}$. Число, стоящее в центре, равно $36x=\frac{36}{341}$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD в четыре раза больше основания BC, а угол $\angle BCD$ в два раза больше угла $\angle BAD$. Найдите отношение $CD : PQ$, где PQ — средняя линия трапеции.

Ответ: 6:5. **Решение.** Пусть $BC=a$, $AD=4a$, тогда $PQ=(a+4a)/2=2{,}5a$. Проведем биссектрису CL угла $\angle BCD$ (см. рис.). Она разобьет трапецию на параллелограмм и равнобедренный треугольник $\triangle CLD$ со сторонами $CD=LD=3a$. Следовательно, $CD:PQ=3a:2{,}5a=6:5$.



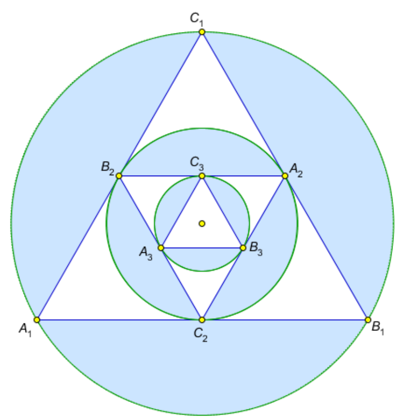
6. Найдите наименьшее значение выражения $x^2+y^2+3z^2+2xy$ при условии, что $xy+z=1$ и $x, y, z > 0$.

   Ответ: $\frac{8}{3}$. **Решение.** Зафиксируем z и найдем минимум $|x+y|$ при $xy = 1-z$. Он достигается при $x = y = \sqrt{1-z}$. Подставляя эти значения в выражение $(x+y)^2 + 3z^2$, получим $4 - 4z + 3z^2$. Это квадратичная функция, которая достигает минимума, равного $\frac{8}{3}$ при $z = \frac{2}{3}$.

7. Дан многочлен $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, про который известно, что $P(2014) = 1$, $P(2015) = 2$, $P(2016) = 3$, $P(2017) = 4$, $P(2018) = 5$. Найдите $P(2013)$.

   Ответ: -5! = -120. **Решение.** Рассмотрим многочлен $P(x) - x + 2013$, числа 2014, ... 2018 являются его корнями. Следовательно (т.к. старший коэффициент равен 1) его можно представить как $P(x) - x + 2013 = (x-2014)(x-2015)\cdot\ldots\cdot(x-2018)$. Подставляя $x = 2013$, получим $P(2013) - 2013 + 2013 = -120$.

8. Правильный треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ вписали в окружность единичного радиуса. В треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ вписали окружность и точки касания обозначили A_2, B_2 и C_2. В треугольник $\triangle A_2B_2C_2$ снова вписали окружность и точки касания обозначили A_3, B_3 и C_3 ... Так сделали 100 раз, в результате образовалось 100 треугольников и 100 окружностей (на рисунке показаны первые 3 шага этого процесса). Найдите общую площадь



   всех 300 закрашенных частей.

   Ответ: $(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}) \cdot (1 - 4^{-100})$. **Решение.** Заметим, что на каждом шаге размер окружности и треугольника уменьшается в два раза. Поэтому площади указанных частей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$. Площадь первой из них можно получить отняв от площади окружности $S_{\text{окр.}} = \pi$ площадь правильного треугольника $A_1B_1C_1$, равную $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Сумма геометрической прогрессии равна

$$b_1 \cdot \frac{q^N - 1}{q - 1} = (\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4})\frac{(1/4)^{100} - 1}{-3/4} = (\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}) \cdot (1 - 4^{-100}).$$

9. Решите уравнение $f(x) = 0$, если известно, что функция $f(x)$ является четной и при любых x, y выполнено равенство $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 2014$.

   Ответ: $\pm 2\sqrt{1007}$. **Решение.** Подставив $x = y = 0$, получим, что $f(0) = -2014$. Подставим $y = -x$ и воспользуемся четностью $f(x)$, тогда $-2014 = f(0) = 2f(x) - x^2 + 2014$, откуда $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2014$. Приравняв к нулю и решив полученное уравнение, найдем $x = \pm 2\sqrt{1007}$.