Заключительный этап. 9 класс.

1. В некоторой стране алфавит состоит из трёх букв: «М», «Г» и «У». Словом называется любая состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержат каждую из трёх букв хотя бы по разу?

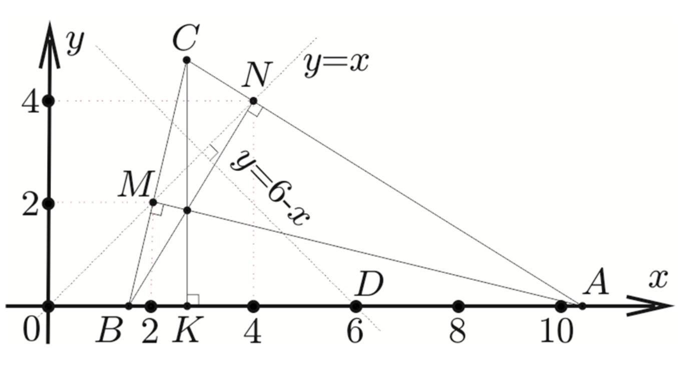
   Ответ: $2^{101}-4$. **Решение.** Разобравшись со структурой слов, приходим к рассмотрению трёх случаев.
   1) Первая буква М. Тогда вторая — У, третья - Г или М, четвертая — У, пятая - Г или М, ..., 200-я - У. Таких слов будет 2^{99}. 2) Аналогично, если первая буква — Г.
   3) Первая буква У. Тогда вторая — Г или М, третья - У, четвертая — Г или М, ..., 200-я — Г или М. Таких слов будет 2^{100}.
   Всего слов: $2^{99}+2^{99}+2^{100}=2^{101}$. Отсюда нужно убрать 4 слова: МУМУ....МУ, ГУГУ...ГУ, УМУМ...УМ и УГУГ...УГ (в каждом из них нет одной из букв).

2. График квадратичной функции $f(x)=x^2+2px-p^2+7p-2015$ пересекает координатные оси в трех точках: A, B и C. Найдите значение p, при котором произведение длин отрезков $OA\times OB\times OC$ будет наименьшим.

   Ответ: $p=\frac{7}{2}$. **Решение.** Для того, чтобы парабола пересекала в трех точках необходимо, чтобы уравнение имело два различных корня x_1 и x_2. Несложно проверить, что для данного трехчлена дискриминант всегда положителен. Тогда произведение $OA\times OB\times OC=|x_1|\cdot|x_2|\cdot|f(0)|$. Применив теорему Виета, получим, что это произведение равно квадрату свободного члена. Значит оно минимально, когда минимален $(-p^2+7p-2015)^2$, что будет при $p=\frac{7}{2}$.

3. В треугольнике $\triangle ABC$, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM, BN и CK. Найдите длину основания AB, если известны координаты точек $M(2,2)$ и $N(4,4)$.

   Ответ: $AB=4\sqrt{5}$. **Решение.**



Опирающаяся на AB как на

диаметр окружность содержит точки M и N (см. рис.). Её центр D равноудалён от M и N. Так как прямая MN имеет вид $y = x$, то перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину MN — точку $(3, 3)$ — имеет вид $y = 6 - x$. Значит, середина AB — точка D — имеет координаты $(6, 0)$. Точка D равноудалена от точек A, B, M и N. При этом $DM^2 = DN^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. Значит, $BD = AD = 2\sqrt{5}$, и длина основания равна $AB = 4\sqrt{5}$.

4. Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:
   a) Из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины так, чтобы получившаяся разность стала «хорошей».
   b) Из «хорошего» числа нельзя вычесть не более половины, так, чтобы оно осталось «хорошим».
   Известно, что число 1 — «хорошее». Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

   Ответ: 2047. **Решение.** Рассмотрев несколько первых натуральных чисел заметим, что хорошие числа имеют вид $2^n - 1$ (а $2^n, ..., 2n + 1 - 2$ — плохие).

   Докажем это по методу математической индукции. Для $n = 1$ утверждение дано в условии. Предположим, что утверждение доказано для $n - 1$. Рассмотрим число вида $M = 2^n + k$, где $k = 0, 1, ..., 2^n - 2$. Тогда из такого числа можно вычесть $k + 1 \leqslant \frac{1}{2}(2^n + k) = \frac{M}{2}$.

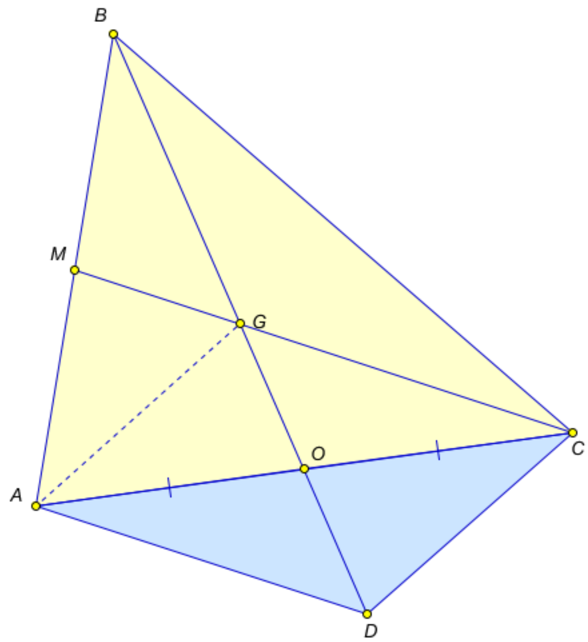
   С другой стороны, рассмотрим число вида $N = 2^n - 1$. Из него надо вычесть по крайней мере 2^{n-1}, что превосходит $\frac{N}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$.

   Значит ближайшим хорошим числом к 2015 будет число $2047 = 2^{11} - 1$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и BCD равны, а площадь ACD равна половине площади ABD. Найдите длину отрезка CM, где M — середина стороны AB, если известно, что $AD = 12$.

   Ответ: $CM = 18$. **Решение.** Из равенства площадей ABC и CBD вытекает, что O — точка пересечения диагоналей AC и BD делит AC пополам (см. рис). А из того, что $S(ACD)\frac{1}{2}S(ABD)$ следует, что $S(AOD) = \frac{1}{3}S(AOB)$, следовательно, $OD = \frac{1}{3}BO = GO$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC.

   Значит $AGCD$ — параллелограмм, поэтому $AD = CG = \frac{2}{3}CM = 12$, откуда $CM = 18$.



6. Последовательность задана рекуррентным соотношением: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 3$. Может ли число $a_{2015} - a_{2011} - 39$ быть простым?

   Ответ: Нет, это число будет кратно $a_{2011} > 1$. **Решение.** Покажем, что это число будет кратно a_{2011}. Действительно, рассмотрим остатки от деления на a_{2011} последующих членов. Очевидно, a_{2012} и a_{2013} дают остатки 3, a_{2014} — 12, а a_{2015} — 39. Следовательно, $a_{2015} - a_{2011} - 39$ делится на a_{2011} без остатка.

7. Найдите решение системы в натуральных числах $\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2) \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2) \end{cases}$

   Ответ: $a = b = c = d = 1$. **Решение.** Сначала докажем, что $(a, b) = 1$. Действительно, предположим, что $(a, b) = d > 1$. Тогда из первого уравнения $b = c(a^2 + b^2) - a^3 \vdots d^2$. Аналогично из второго уравнения $a \vdots d^2$, что приводит к противоречию.

   Заметим, что числа $a(a^2 + b^2) - (a^3 + b) = b(ab - 1)$ и $b(a^2 + b^2) - (a + b^3) = a(ab - 1)$ кратны $a^2 + b^2$. Следовательно, $ab - 1$ должно делиться на $a^2 + b^2$, что возможно только при $a = b = 1$.

Заключительный этап. 8 класс.

1. На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая