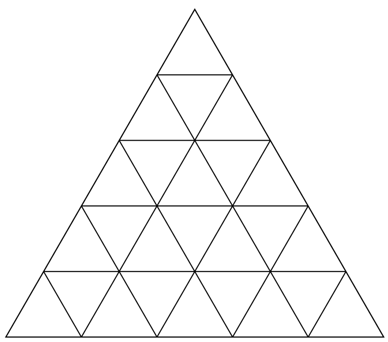
Отборочный этап. 8 класс.

1. На рисунке изображена сетка, состоящая из 25 маленьких правильных треугольников.

   Сколько ромбов, можно составить из двух соседних маленьких треугольников?

   Ответ: 30. **Решение.** Заметим, что каждому ромбу соответствует одно внутренне ребро. Подсчитав внутренние ребра получаем ответ — 30 ромбов.

2. *Сказка про жадных медвежат.*

   Два медвежонка нашли большую круглую головку сыра. Хотели поделить её поровну, но не сумели — каждый боялся, что другому достанется больше. Вдруг откуда ни возьмись подошла к ним лиса.
   — Давайте я вам поделю сыр поровну.
   — Вот хорошо-то! — обрадовались медвежата. — Дели! Лиса взяла сыр и разломила его на две части, но так, что один кусок был больше другого. Медвежата закричали:
   — Этот больше! Лиса успокоила их:
   — Сейчас я всё улажу. Она откусила от большей части кусок, равный меньшей части. Теперь большим стал другой кусок.
   — И так неровно! — забеспокоились медвежата.
   — Ну, полно, — сказала лиса. — Я сама знаю своё дело! И она снова откусила от большей кусок, равный меньшей части.

Лиса продолжала так делить сыр, пока не наелась. Всего она откусила по 3 раза от каждой части таким же образом — откусывая от одной части кусок, равный другой части. А медвежата только чёрными носами водили туда-сюда, туда-сюда: от большего куска — к меньшему, от меньшего — к большему.

Но вот куски сравнялись, а медвежатам почти и сыра не осталось: два маленьких кусочка по 25 граммов каждый.
— Ну что ж, — сказала лиса, — хоть и помалу, да зато поровну! Приятного вам аппетита, медвежата! — И, помахав хвостом, плутовка убежала.

Определите вес головки сыра, найденной медвежатами.

Ответ: 850г. **Решение.** Произведем разбор с конца. В последний момент у медвежат были кусочки по 25г. каждый, значит перед этим были кусочки 50 и 25 грамм. Будем обозначать это $(25, 25) \leftarrow (50, 25)$. Тогда полная последовательность действий будет выглядеть так:
$(25, 25) \leftarrow (50, 25) \leftarrow (50, 75) \leftarrow (125, 75) \leftarrow (125, 200) \leftarrow (325, 200) \leftarrow (325, 525)$. Следовательно, вес головки, которую нашли медвежата, был равен $325 + 525 = 850$.

3. Найдите количество чисел от 1 до 3400, кратных 34 и имеющих ровно 2 нечетных натуральных делителя. Например, само число 34 имеет делители 1, 2, 17 и 34, ровно два из которых нечетные.

   Ответ: 7. **Решение.** Очевидно, что если число делится на 34, то его делителями всегда будут 1 и 17. По условию других нечетных делителей быть не должно, следовательно, это должны быть числа вида $17 \cdot 2^k$, $k \geqslant 1$ (и только они). Эти числа попадают в указанный диапазон при $k = 1, 2, ..., 7$.

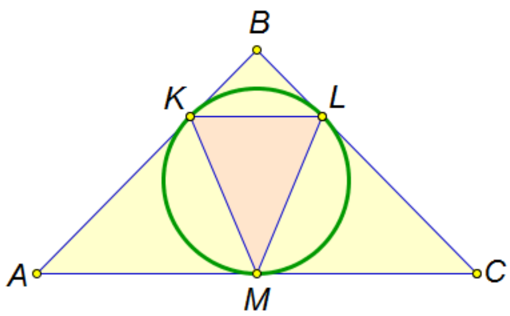
4. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ меньше дроби $\frac{c}{d}$ и $b > d > 0$. Определите, что меньше: среднее арифметическое этих двух дробей или дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

   Ответ: Дробь $\frac{a+c}{b+d}$ меньше. **Решение.** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad(b-d) < bc(b-d) \Leftrightarrow abd + bcd < b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2abd + 2bcd < abd + bcd + b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2(a+c)bd < (ad+bc)(b+d) \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{ad+bc}{2bd} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$.

5. В равнобедренный треугольник со сторонами $AB = BC = 3$, $AC = 4$ вписана окружность, касающаяся сторон треугольника в точках K, L и M. Найдите отношение площадей $S(\triangle ABC) : S(\triangle KLM)$.

   Ответ: $\frac{9}{2}$. **Решение.** Поскольку треугольник равнобедренный, то вписанная окружность касается основания в середине, поэтому $AM = MC = AK = CL = 2$, $BK = BL = 1$. Найдем площади треугольников (по отношению к площади $\triangle ABC$): $S(\triangle AKM) = S(\triangle CLM) = \frac{1}{3}S(\triangle ABC)$,

$S(\triangle BKL) = \frac{1}{9}S(\triangle ABC)$. Таким образом, площадь оставшейся части $S(\triangle KLM) = \frac{2}{9}S(\triangle ABC)$.



6. Найдите сумму

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{1}+\sqrt{2})}+\frac{1}{(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{(\sqrt[4]{9999}+\sqrt[4]{10000})(\sqrt{9999}+\sqrt{10000})}.$$

Ответ: 9. **Решение.** Если домножить числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ на $\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n+1}$, получим $\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}$. Указанная сумма преобразуется к $(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{1})+(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})+\ldots+(\sqrt[4]{10000}-\sqrt[4]{9999}) = \sqrt[4]{10000}-\sqrt[4]{1}=9$.

7. В таблице 5×5 расставлены числа (не обязательно целые), причем каждое число в три раза меньше числа, стоящего в соседней клетке справа, и в два раза больше числа, стоящего в соседней клетке снизу. Найдите число, стоящее в центральной клетке, если известно, что сумма всех чисел в таблице равна 341.

		?		

Ответ: $\frac{36}{11}$. **Решение.** Обозначим число, стоящее в левом нижнем углу за x. Получим уравнение $x(1+2+4+8+16)(1+3+9+27+81) = 341$, откуда $x = \frac{1}{11}$. Число, стоящее в центре, равно $36x = \frac{36}{11}$.

8. В трапеции $ABCD$ основание AD в четыре раза больше основания BC, а угол $\angle BCD$ в два раза больше угла $\angle BAD$. Найдите отношение $CD : PQ$, где PQ — средняя линия трапеции.

   Ответ: 6:5. **Решение.** Пусть $BC = a$, $AD = 4a$, тогда $PQ = (a+4a)/2 = 2{,}5a$. Проведем биссектрису CL угла $\angle BCD$ (см. рис.). Она разобьет трапецию на параллелограмм и равнобедренный треугольник $\triangle CLD$ со сторонами $CD = LD = 3a$. Следовательно, $CD : PQ = 3a : 2{,}5a = 6 : 5$.