Заключительный этап. 8 класс.

1. На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые у него были до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество подарков, которые у него были до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

   Ответ: 18. **Решение.** Если n — число подарков, а a — возраст Андрея, то $n(n-2) = a(n-1)$. Отсюда $a = \frac{n^2-2n-16}{n-1} = n - 1 - \frac{17}{n-1}$. Поэтому $n - 1 = 17$, $a = 16$.

2. В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. На стороне AC выбрана точка B_1, так, $AB_1 : B_1 = 1 : 2$. Найдите сумму углов $\angle AA_1B_1 + \angle AA_2B_1$.

   Ответ: $30°$. **Решение.** Поскольку $A_1B_1 \| AB$, то $\angle BAA_1 = \angle AA_1B_1$. Из симметрии $\angle BAA_1 = \angle CAA_2$. Остается заметить, что $\angle CB_1A_2 = \angle B_1AA_2 + \angle AA_2B_1$ как внешний в $\triangle AA_2B_1$.

3. Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:

   a) Из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины так, чтобы получившаяся разность стала «хорошей».

   b) Из «хорошего» числа нельзя вычесть не более половины, так, чтобы оно осталось «хорошим».

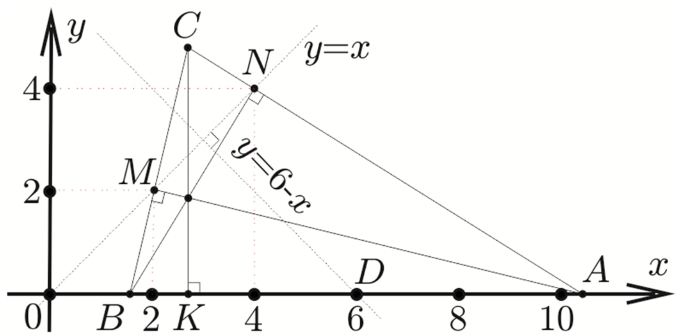
   Известно, что число 1 — «хорошее». Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

   Ответ: 2047. **Решение.** Заметим, что хорошие числа имеют вид $2^n - 1$. Действительно, пусть число имеет вид $M = 2^n + k$, где $k = 0, 1, ..., 2^n - 2$. Тогда из такого числа можно вычесть $k + 1 \leqslant \frac{1}{2}(2^n + k) = \frac{M}{2}$. С другой стороны из числа вида $N = 2^n - 1$ надо вычесть по крайней мере 2^{n-1}, что превосходит $\frac{N}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$. Значит ближайшим к 2015 будет число $2047 = 2^{11} - 1$.

4. В треугольнике $\triangle ABC$, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM, BN и CK. Найдите длину основания AB, если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

   Ответ: $AB = 4\sqrt{5}$. **Решение.** Опирающаяся на AB как на диаметр окружность содержит точки M и N. Её центр D равноудалён от M и N.

Так как прямая MN имеет вид $y = x$, то перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину MN — точку $(3, 3)$ — имеет вид $y = 6 - x$. Значит, середина AB — точка D — имеет координаты $(6, 0)$. Точка D равноудалена от точек A, B, M и N. При этом $DM^2 = DN^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. Значит, $BD = AD = 2\sqrt{5}$, и длина основания равна $AB = 4\sqrt{5}$.



5. В некоторой стране алфавит состоит из трёх букв: «М», «Г» и «У». Словом называется любая состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержат каждую из трёх букв хотя бы по разу? **Ответ:** $2^{101} - 4$.
Решение. Разобравшись со структурой слов, приходим к рассмотрению трёх случаев.
1) Первая буква М. Тогда вторая — У, третья - Г или М, четвертая — У, пятая - Г или М, ..., 200-я - У. Таких слов будет 2^{99}.
2) Аналогично, если первая буква — Г.
3) Первая буква У. Тогда вторая — Г или М, третья - У, четвертая — Г или М, ..., 200-я — Г или М. Таких слов будет 2^{100}.
Всего слов: $2^{99} + 2^{99} + 2^{100} = 2^{101}$. Отсюда нужно убрать 4 слова: МУМУ....МУ, ГУГУ...ГУ, УМУМ...УМ и УГУГ...УГ (в каждом из них нет одной из букв).

6. График квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2015$ пересекает координатные оси в трех точках: A, B и C. Найдите значение p, при котором произведение длин отрезков $OA \times OB \times OC$ будет наименьшим.

Ответ: $p = \frac{7}{2}$. **Решение.** Для того, чтобы парабола пересекала в трех точках необходимо, чтобы уравнение имело два различных корня x_1 и x_2. Несложно проверить, что для данного трехчлена дискриминант всегда пложителен. Тогда произведение $OA \times OB \times OC = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |f(0)|$. Применив теорему Виета, получим, что это произведение равно квадрату свободного члена. Значит оно минимально, когда минимален $(-p^2 + 7p - 2015)^2$, что будет при $p = \frac{7}{2}$.