

Отборочный этап. 5-7 классы.

1. У отца есть три сына, родившихся в один и тот же день, но в разные годы. Младшему из сыновей 2 года. Через 12 лет возраст отца станет равен сумме возрастов его трех сыновей. Определите нынешний возраст среднего и старшего сыновей, если известно, что отцу сейчас 33 года.

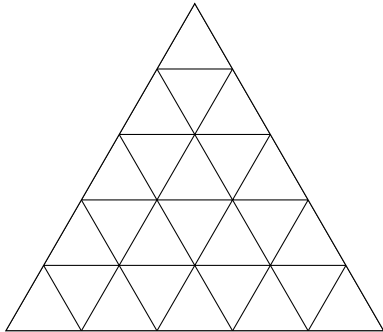
Ответ: 3 и 4. **Решение.** Через 12 лет отцу станет 45 лет, а младшему сыну — 14. Оставшимся сыновьям в сумме будет 31 год. Поскольку возраст каждого более 14 лет, то это возможно только если им 15 и 16 лет. Следовательно, сейчас им 3 и 4 года.

2. Стопку листов формата А4 перегнули посередине и сложили в два раза (получилась брошюра формата А5). После этого перенумеровали страницы получившейся брошюры: 1, 2, 3, ... Оказалось, что сумма чисел на одном из листов равна 74. Сколько листов было в стопке?

Ответ: 9. **Решение.** Заметим, что сумма чисел на каждом листочке одинакова. Если последняя страница имеет номер n , то на первом листочке

будут числа $1, 2, n - 1$ и n . Следовательно $2n + 2 = 74$, откуда получаем, что количество страниц $n = 36$. На каждом листе размещается 4 страницы, значит листов было 9.

3. На рисунке изображена сетка, состоящая из 25 маленьких правильных треугольников.



Сколько ромбов, можно составить из двух соседних маленьких треугольников?

Ответ: 30. Решение. Заметим, что каждому ромбу соответствует одно внутренне ребро. Подсчитав внутренние ребра получаем ответ — 30 ромбов.

4. *Сказка про жадных медвежат.* Два медвежонка нашли большую круглую головку сыра. Хотели поделить её поровну, но не сумели — каждый боялся, что другому достанется больше. Вдруг откуда ни возьмись подошла к ним лиса.

— Давайте я вам поделю сыр поровну.

— Вот хорошо-то! — обрадовались медвежата. — Дели! Лиса взяла сыр и разломала его на две части, но так, что один кусок был больше другого. Медвежата закричали:

— Этот больше! Лиса успокоила их:

— Сейчас я всё улажу. Она откусила от большей части кусок, равный меньшей части. Теперь большим стал другой кусок.

— И так неровно! — забеспокоились медвежата.

— Ну, полно, — сказала лиса. — Я сама знаю своё дело! И она снова откусила от большей кусок, равный меньшей части.

Лиса продолжала так делить сыр, пока не наелась. Всего она откусила по 3 раза от каждой части таким же образом — откусывая от одной части кусок, равный другой части. А медвежата только чёрными носами водили туда-сюда, туда-сюда: от большего куска — к меньшему, от меньшего — к большему.

Но вот куски сравнялись, а медвежатам почти и сыра не осталось: два маленьких кусочка по 20 граммов каждый.

— Ну что ж, — сказала лиса, — хоть и помалу, да зато поровну! Приятного вам аппетита, медвежата! — И, помахав хвостом, плутовка убежала. Определите вес головки сыра, найденной медвежатами.

Ответ: 680г. **Решение.** Произведем разбор с конца. В последний момент у медвежат были кусочки по 20г. каждый, значит перед этим были кусочки 40 и 20 грамм. Будем обозначать это $(20, 20) \leftarrow (40, 20)$. Тогда полная последовательность действий будет выглядеть так: $(20, 20) \leftarrow (40, 20) \leftarrow (40, 60) \leftarrow (100, 60) \leftarrow (100, 160) \leftarrow (260, 160) \leftarrow (260, 420)$. Следовательно, вес головки, которую нашли медвежата, был равен $260 + 420 = 680$.

5. В таблице 3x3 написаны следующие числа :

10	20	40
32	61	91
100	1000	2000

Разрешается за один ход менять местами любые два числа. За какое наименьшее количество ходов можно добиться того, чтобы сумма чисел в каждом столбце делилась на 3?

Ответ: 2. **Решение.**

1	2	1
2	1	1
1	1	2

Выпишем остатки от деления этих чисел на 3. Несложно заметить, что сумма чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма соответствующих остатков делится на 3. Остатки, равные 2, надо собрать в одном столбце, на что потребуется не менее 2 ходов. Очевидно, что за 2 хода это сделать можно.

6. Найдите количество чисел от 1 до 3400, кратных 34 и имеющих ровно 2 нечетных натуральных делителя. Например, само число 34 имеет делители 1, 2, 17 и 34, ровно два из которых нечетные.

Ответ: 7. **Решение.** Очевидно, что если число делится на 34, то его делителями всегда будут 1 и 17. По условию других нечетных делителей быть не должно, следовательно, это должны быть числа вида $17 \cdot 2^k$, $k \geq 1$ (и только они). Эти числа попадают в указанный диапазон при $k = 1, 2, \dots, 7$.

7. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ меньше дроби $\frac{c}{d}$ и $b > d > 0$. Определите, что меньше: среднее арифметическое этих двух дробей или дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Ответ: Дробь $\frac{a+c}{b+d}$ меньше. **Решение.** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad(b-d) < bc(b-d) \Leftrightarrow abd + bcd < b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2abd + 2bcd < abd + bcd + b^2c + ad^2 \Leftrightarrow 2(a+c)bd < (ad+bc)(b+d) \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{ad+bc}{2bd} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right)$.