Заключительный этап. 5-7 классы.

1. В полном контейнере находятся 150 арбузов и дынь на общую сумму 24 тыс. рублей, при этом все арбузы суммарно стоят столько же, сколько все дыни. Сколько рублей стоит один арбуз, если известно, что дынь (без арбузов) контейнер вмещает 120 штук, а арбузов (без дынь) — 160?

   Ответ: 100 руб. **Решение.** Пусть было арбузов, тогда дынь будет $150 - x$. Если контейнер вмещает 120 дынь, то одна дыня занимает $\frac{1}{120}$ часть контейнера. Аналогично один арбуз занимает $\frac{1}{160}$ часть контейнера. Поэтому, если в контейнере всего 150 арбузов и дынь (и при этом контейнер полон), то $\frac{x}{160} + \frac{150-x}{120} = 1$. Отсюда $x = 120$. Значит, было 120 арбузов и 30 дынь. Если арбуз стоит a рублей, а дыня — b рублей, то (так как стоимость арбузов и дынь одинакова): $120a = 30b = 12000$. Поэтому $= 100$, $b = 400$.

2. Для двух положительных чисел $a \neq b$ известно, что

$$a^2 - 2015a = b^2 - 2015b.$$

   Какое наименьшее значение может принимать $a^2 + b^2$?

   Ответ: $2015^2/2 = 2030112{,}5$. **Решение.** Перенося и сокращая на $a - b \neq 0$, получим $a + b = 2015$. Тогда $a^2 + b^2 = a^2 + (2015 - a)^2 = 2a^2 - 2030a + 2015^2$ и наименьшее значение достигается в вершине параболы $2x^2 + 4030x + 2015^2$, т.е. когда $a = b = 2015/2$.

3. Таблицу размера 3×3 надо заполнить числами 2014, 2015 и 2016, так, чтобы сумма чисел в каждой строке была одинаковой. Сколькими различными способами можно это сделать?

   Ответ: 831. **Решение.** Вычтем 2015 из всех чисел — суммы при этом останутся одинаковыми, а числа в таблице будут принимать значения 0 и ± 1. Рассмотрим 27 возможных комбинаций чисел, находящихся в одной строке. Возможные значения суммы этих чисел: ± 3 — по 1 комбинации, ± 2 — по 3 комбинации, ± 1 — по 6 комбинаций, 0 — 7 комбинаций. Тогда указанную в условии расстановку можно сделать $2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 6^3 + 7^3 = 831$ способом.

4. На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые у него были до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество

подарков, которые у него были до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

Ответ: 18. **Решение.** Если n — число подарков, а a — возраст Андрея, то $n(n-2) = a(n-1)$. Отсюда $a = \frac{n^2-2n-16}{n-1} = n - 1 - \frac{17}{n-1}$. Поэтому $n - 1 = 17$, $a = 16$.

5. В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. На стороне AC выбрана точка B_1, так, $AB_1 : B_1 = 1 : 2$. Найдите сумму углов $\angle AA_1B_1 + \angle AA_2B_1$.

   Ответ: $30°$. **Решение.** Поскольку $A_1B_1 \| AB$, то $\angle BAA_1 = \angle AA_1B_1$. Из симметрии $\angle BAA_1 = \angle CAA_2$. Остается заметить, что $\angle CB_1A_2 = \angle B_1AA_2 + \angle AA_2B_1$ как внешний в $\triangle AA_2B_1$.

6. Найдите наибольшее возможное значение НОД$(x + 2015y, y + 2015x)$, если известно, что x и y — взаимно простые числа.

   Ответ: $2015^2 - 1 = 4060224$. **Решение.** Заметим, что общий делитель будет также делить $(x + 2015y) - 2015(y + 2015x) = (1 - 2015^2)x$. Аналогично он делит $(1 - 2015^2)y$, а поскольку $(x, y) = 1$, то он делит $(1 - 2015^2)$. С другой стороны, если взять $x = 1$, $y = 2015^2 - 2016$, то как раз и получим НОД$(x + 2015y, y + 2015x) = 2015^2 - 1$.