Олимпиада «ЛОМОНОСОВ – 2014-2015»
МАТЕМАТИКА

Отборочный этап. 10 – 11 класс. Тур 1.

Задание для разминки

1. Второй член геометрической прогрессии равен 5, а третий член равен 1. Найдите первый член этой прогрессии.

Ответ: 25. **Решение.** Так как $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=q$, то $a_1=\frac{a_2^2}{a_3}=25$.

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, катет которого равен 6, а гипотенуза равна 10.

Ответ: 24. **Решение.** По теореме Пифагора второй катет равен $\sqrt{10^2-6^2}=8$. Значит, площадь треугольника равна $\frac{6\cdot 8}{2}=24$.

Основное задание

1.1. Бизнесмены Иванов, Петров и Сидоров решили создать автопредприятие. Иванов купил для предприятия 70 одинаковых автомобилей, Петров – 40 таких же автомобилей, а Сидоров внес в предприятие 44 миллиона рублей. Известно, что Иванов и Петров могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех бизнесменов будет одинаковым. Сколько денег полагается Иванову? Ответ дать в миллионах рублей.

Ответ: 40. **Решение.** *1 способ.* Каждый из бизнесменов должен внести столько же, сколько Сидоров, то есть 44 млн. руб. Если автомобиль стоит *x*, то $\frac{70x+40x}{3}=44$, $x=1,2$. Получается, что Иванов внес $70\cdot 1,2=84$ млн. руб., поэтому он должен получить обратно $84-44=40$ млн. руб. Петров внес $40\cdot 1,2=48$ млн. руб., поэтому он должен получить обратно $48-44=4$ млн. руб.

2 способ. Каждый из бизнесменов должен внести столько же, сколько Сидоров, то есть 44 млн. руб. Если Иванов заберет t млн. руб., то Петрову останется $(44-t)$ млн. руб. Поэтому $70x-t=44$ и $40x-(44-t)=44$ (здесь x – цена автомобиля). Решая эту систему, получим $x=1,2$ и $t=40$.

1.2. Бизнесмены Иванов, Петров и Сидоров решили создать автопредприятие. Иванов купил для предприятия 70 одинаковых автомобилей, Петров – 40 таких же автомобилей, а Сидоров внес в предприятие 33 миллиона рублей. Известно, что Иванов и Петров могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех бизнесменов будет одинаковым. Сколько денег полагается Иванову? Ответ дать в миллионах рублей.

Ответ: 30.

1.3. Выпускники престижного колледжа Александр, Борис и Валерий решили создать компьютерную фирму. Александр купил для фирмы 30 одинаковых компьютеров, Борис – 50 таких же компьютеров, а Валерий внес в предприятие 24 тысячи долларов. Известно, что Александр и Борис могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех молодых людей будет одинаковым. Сколько денег полагается Борису? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 21.

1.4. Выпускники престижного колледжа Александр, Борис и Валерий решили создать компьютерную фирму. Александр купил для фирмы 30 одинаковых компьютеров, Борис – 50 таких же компьютеров, а Валерий внес в предприятие 32 тысячи долларов. Известно, что Александр и Борис могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех молодых людей будет одинаковым. Сколько денег полагается Борису? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 28.

1.5. Фермеры Иван, Петр и Федор решили создать молочную ферму. Иван купил для фермы 90 коров (все по одной цене), Петр – 80 таких же коров, а Федор внес в предприятие 34 тысячи долларов. Известно, что Иван и Петр могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех фермеров будет одинаковым. Сколько денег полагается Ивану? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 20.

1.6. Фермеры Иван, Петр и Федор решили создать молочную ферму. Иван купил для фермы 90 коров (все по одной цене), Петр – 80 таких же коров, а Федор внес в предприятие 51 тысячу долларов. Известно, что Иван и Петр могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех фермеров будет одинаковым. Сколько денег полагается Ивану? Ответ дать в тысячах долларов.

Ответ: 30.

1.7. Три подруги Елена, Ольга и Татьяна решили открыть маленький бутик готового платья. Елена купила для магазина 80 платьев (все по одной цене), Ольга – 50 таких же платьев, а Татьяна внесла в предприятие 156 тысяч рублей. Известно, что Елена и Ольга могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждой из трех девушек будет одинаковым. Сколько денег полагается Елене? Ответ дать в тысячах рублей.

Ответ: 132.

1.8. Три подруги Елена, Ольга и Татьяна решили открыть маленький бутик готового платья. Елена купила для магазина 80 платьев (все по одной цене), Ольга – 50 таких же платьев, а Татьяна внесла в предприятие 234 тысячи рублей. Известно, что Елена и Ольга могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждой из трех девушек будет одинаковым. Сколько денег полагается Елене? Ответ дать в тысячах рублей.

Ответ: 198.

2.1. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путём перестановки цифр числа 377 353 752?

Ответ: 1120. **Решение.** Так как число делится на 5, то на 9-м месте может стоять только пятёрка. После этого нужно на оставшиеся 8 мест распределить 8 цифр: 3 семёрки, 3 тройки, пятерку и двойку. Всего перестановок будет $8!$, но так как есть повторяющиеся цифры, то ответ будет: $\frac{8!}{3!3!}=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3}=4\cdot 5\cdot 7\cdot 8=1120$.

2.2. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 2, можно составить путём перестановки цифр числа 131 152 152?

Ответ: 840. *Указания*. Чисел будет $\frac{8!}{4!2!}=840$.

2.3. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путём перестановки цифр числа 137 153 751?

Ответ: 1680. *Указания.* Чисел будет $\frac{8!}{3!2!2!}=1680$.

2.4. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 2, можно составить путём перестановки цифр числа 231 157 152?

Ответ: 3360. *Указания.* Чисел будет $\frac{8!}{3!2!} = 3360$.

3.1. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 8. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 1152. **Решение.** Возьмём в качестве указанных в условии диагоналей для определённости диагонали A_1C_1 и AD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим две параллельные плоскости A_1C_1B и AD_1C, в каждой из которых лежит по одной из этих диагоналей. Расстояние между этими плоскостями равно данному в условии расстоянию между диагоналями *d*. Его можно выразить через длину ребра куба *a*, например, рассмотрев перпендикулярное этим двум плоскостям сечение B_1D_1DB. Диагональ куба B_1D перпендикулярна обеим плоскостям и делится ими на три равные части. Получаем: $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, то есть $a = d\sqrt{3}$. Тогда $S = 6a^2 = 6 \cdot 3d^2 = 18d^2$.

3.2. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 3. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 162.

3.3. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 4. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 288.

3.4. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 5. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 450.

3.5. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 6. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 648.

3.6. Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 7. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 882.

3.7. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 162. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 3.

3.8. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 288. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 4.

3.9. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 450. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 5.

3.10. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 648. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 6.

3.11. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 882. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 7.

3.12. Определите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 1152. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 8.

4.1. Найдите сумму всех корней уравнения $x^2-31x+220=2^x\left(31-2x-2^x\right)$.

Ответ: 7. **Решение.** Исходное уравнение равносильно уравнению $\left(x+2^x\right)^2-31\left(x+2^x\right)+220=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2^x=11, \\ x+2^x=20. \end{array}\right.$

Каждое из уравнений этой совокупности имеет не более одного корня, так функция $f\left(x\right)=x+2^x$ – монотонно возрастающая. Первое уравнение имеет корень $x=3$, а второе – корень $x=4$. Сумма корней равна 7.

4.2. Найдите сумму всех корней уравнения $x^2-41x+330=3^x\left(41-2x-3^x\right)$.

Ответ: 5. *Указания*. Корни уравнения: 2 и 3.

4.3. Найдите сумму всех корней уравнения $4x^2-58x+190=\left(29-4x-\log_2 x\right)\cdot\log_2 x$.

Ответ: 12. *Указания*. Корни уравнения: 4 и 8.

4.4. Найдите сумму всех корней уравнения $4x^2-44x+40=\left(22-4x-\log_3 x\right)\cdot\log_3 x$.

Ответ: 10. *Указания.* Корни уравнения: 1 и 9.

5.1. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{3}{4}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 73. **Решение.** Требуется найти такую дробь $\frac{a}{b}$, при которой $\frac{a}{b}-\frac{3}{4}=\frac{4a-3b}{4b}$ достигает минимума. Поэтому ищется максимальное двузначное *b*, при котором $4a-3b=1$. Если при этом получается $b\geq 50$, то дробь $\frac{a}{b}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4b}$ будет всегда меньше, чем любая другая дробь с большим целым числителем и другим двузначным *b*.

Решаем уравнение $4a-3b=1$. Так как $b=\frac{4a-1}{3}=a+\frac{a-1}{3}$ – целое, то $a=1+3k$, где k – произвольное целое число. Поэтому $b=1+4k$. Максимальным k, при котором a и b двузначные, будет $k=24$. Поэтому $b=97$ и $a=73$, то есть искомая дробь: $\frac{a}{b}=\frac{73}{97}$.

5.2. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{5}{6}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 81. *Указания*. Искомая дробь: $\frac{81}{97}$.

5.3. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{4}{5}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 77. *Указания.* Искомая дробь: $\frac{77}{96}$.

5.4. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{5}{7}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 68. *Указания.* Искомая дробь: $\frac{68}{95}$.

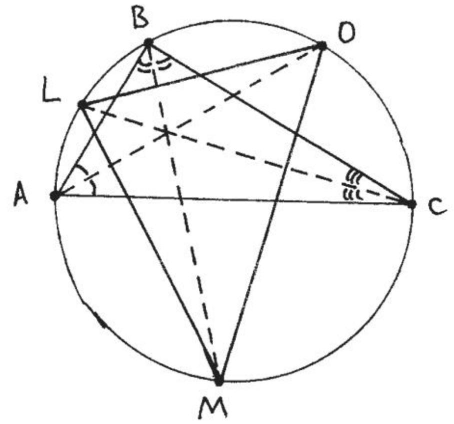
5.5. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{3}{5}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 59. *Указания*. Искомая дробь: $\frac{59}{98}$.

5.6. Среди всех простых дробей, числитель и знаменатель которых являются двузначными числами, найдите наименьшую дробь, большую чем $\frac{4}{9}$. В ответе укажите её числитель.

Ответ: 41. *Указания*. Искомая дробь: $\frac{41}{92}$.

6.1. В неравнобедренном треугольнике *ABC* один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов *A, B* и *C* пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках *L, O* и *M* соответственно. Найдите площадь треугольника *LOM*, если площадь треугольника *ABC* равна 8. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.



Ответ: 11. **Решение.** Пусть в треугольнике *ABC* угол α равен разности углов $\beta-\gamma$. Так как $\alpha+\beta+\gamma=180°$, то $\beta-\gamma+\beta+\gamma=180°$ и поэтому $\beta=90°$. Если $\beta=90°$ в два раза больше одного из углов α или γ, то треугольник будет равнобедренным, что противоречит условию. Пусть для определённости $\alpha>\gamma$. Тогда $\beta=90°$, $\alpha=60°$, $\gamma=30°$.

По теореме о вписанных углах:
$\angle MLC=\angle MBC=45°$, $\angle CLO=\angle CAO=30°$. Поэтому $\angle MLO=75°$. Аналогично
$\angle LOM=\angle LOA+\angle AOM=\angle LCA+\angle ABM=15°+45°=60°$,

$\angle OML = \angle OMB + \angle BML = \angle OAB + \angle BCL = 30° + 15° = 45°$.

Таким образом, углы треугольника *LOM* равны $\alpha_1 = 75°$, $\beta_1 = 60°$, $\gamma_1 = 45°$.

С помощью теоремы синусов получим формулу для площади треугольника, вписанного в окружность радиуса *R*: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot \sin\gamma = 2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Поэтому $\frac{S_{LOM}}{S_{ABC}} = \frac{2R\cdot\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}{2R\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin 75°\sin 60°\sin 45°}{\sin 90°s\text{in }60°\sin 30°} = \sqrt{2}\cdot\sin 75°$. Так как $\sin 75° = \sin\left(45° + 30°\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, то получаем: $\frac{S_{LOM}}{S_{ABC}} = = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Поэтому $S_{LOM} = 4\sqrt{3} + 4 \approx 11$.

6.2. В неравнобедренном треугольнике *ABC* один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов *A*, *B* и *C* пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках *L*, *O* и *M* соответственно. Найдите площадь треугольника *LOM*, если площадь треугольника *ABC* равна 2. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 3. *Указания*. Точный ответ: $\sqrt{3}+1$.

6.3. В неравнобедренном треугольнике *ABC* один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов *A*, *B* и *C* пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках *L*, *O* и *M* соответственно. Найдите площадь треугольника *LOM*, если площадь треугольника *ABC* равна 32. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 44. *Указания*. Точный ответ: $16\sqrt{3}+16$.

6.4. В неравнобедренном треугольнике *ABC* один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов *A*, *B* и *C* пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках *L*, *O* и *M* соответственно. Найдите площадь треугольника *LOM*, если площадь треугольника *ABC* равна 20. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 27. *Указания.* Точный ответ: $10\sqrt{3}+10$.

7.1. Вычислить: $4\left(\sin^3\frac{49\pi}{48}\cos\frac{49\pi}{16} + \cos^3\frac{49\pi}{48}\sin\frac{49\pi}{16}\right)\cos\frac{49\pi}{12}$.

Ответ: 0,75. **Решение:** Обозначим $\alpha = \frac{49\pi}{48} = \pi + \frac{\pi}{48}$. Тогда:

$$\left(\sin^3\alpha\cos 3\alpha + \cos^3\alpha\sin 3\alpha\right)\cos 4\alpha = \left[\sin^3\alpha\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right) + \cos^3\alpha\left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\right]\cos 4\alpha$$

$$= \left(-3\sin^3\alpha\cos\alpha + 3\cos^3\alpha\sin\alpha\right)\cos 4\alpha = 3\sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\cos 4\alpha = \frac{3}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$$

$= \frac{3}{4}\sin 4\alpha\cos 4\alpha = \frac{3}{8}\sin 8\alpha$. Поэтому искомое число равно: $4\cdot\frac{3}{8}\sin\left(8\pi + \frac{8\pi}{48}\right) = \frac{3}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 0,75$.

7.2. Вычислить: $4\left(\sin^3\frac{47\pi}{48}\cos\frac{47\pi}{16} + \cos^3\frac{47\pi}{48}\sin\frac{47\pi}{16}\right)\cos\frac{47\pi}{12}$.

Ответ: $-0,75$.

7.3. Вычислить: $4\sqrt{3}\left(\sin^3\frac{11\pi}{24}\cos\frac{11\pi}{8}+\cos^3\frac{11\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{8}\right)\cos\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: $-2,25$.

7.4. Вычислить: $4\sqrt{3}\left(\sin^3\frac{13\pi}{24}\cos\frac{13\pi}{8}+\cos^3\frac{13\pi}{24}\sin\frac{13\pi}{8}\right)\cos\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: 2,25.

7.5. Вычислить: $10\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{7\pi}{32}\cos\frac{21\pi}{32}+\cos^3\frac{7\pi}{32}\sin\frac{21\pi}{32}\right)\cos\frac{7\pi}{8}$.

Ответ: $-3,75$.

7.6. Вычислить: $10\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{3\pi}{32}\cos\frac{9\pi}{32}+\cos^3\frac{3\pi}{32}\sin\frac{9\pi}{32}\right)\cos\frac{3\pi}{8}$.

Ответ: 3,75.

8.1. Решив неравенство $\sqrt{x^2-3x-54}-\sqrt{x^2-27x+162}<8\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25;\,25]$.

Ответ: -290. **Решение.** Переписав неравенство в виде:
$\sqrt{(x+6)(x-9)}-\sqrt{(x-9)(x-18)}<8\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}$, находим его область допустимых значений: $x\le -6$, $x\ge 18$.

Домножив обе части неравенства на положительную на ОДЗ величину
$\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}$, получим

$$(x+6)(x-9)-(x-9)(x-18)<8\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}\left(\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}\right) \Leftrightarrow$$

$$3(x-9)<\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}\left(\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}\right).$$

После этого рассматриваем два случая:

а) $x\le -6$. В этом случае левая часть неравенства отрицательна, а правая часть неотрицательна. Неравенство выполняется.

б) $x\ge 18$. В этом случае получим: $3(x-9)<\sqrt{\frac{x+6}{x-9}}\left(\sqrt{(x+6)(x-9)}+\sqrt{(x-9)(x-18)}\right) \Leftrightarrow$
$3(x-9)<\sqrt{x+6}\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-18}\right) \Leftrightarrow 3(x-9)<x+6+\sqrt{(x+6)(x-18)} \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x+6)(x-18)}>2x-33 \Leftrightarrow x^2-12x-108>4x^2-132x+1089 \Leftrightarrow x^2-40x+399<0 \Leftrightarrow$
$19<x<21$.

Таким образом, решение неравенства: $x\in(-\infty;\,-6]\cup(19;\,21)$. Искомая сумма:
$-25-24-23-\ldots-6+20=-290$.

8.2. Решив неравенство $\sqrt{x^2-x-56}-\sqrt{x^2-25x+136}<8\sqrt{\frac{x+7}{x-8}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25;25]$.

Ответ: -285. *Указания.* Решение неравенства: $x\in(-\infty;-7]\cup(18;20)$.

8.3. Решив неравенство $\sqrt{x^2+3x-54}-\sqrt{x^2+27x+162}<8\sqrt{\frac{x-6}{x+9}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25;25]$.

Ответ: 290. *Указания.* Решение неравенства: $x\in(-21;-19)\cup[6;+\infty)$.

8.4. Решив неравенство $\sqrt{x^2+x-56}-\sqrt{x^2+25x+136}<8\sqrt{\frac{x-7}{x+8}}$, найдите сумму его целых решений, принадлежащих отрезку $[-25;25]$.

Ответ: 285. *Указания.* Решение неравенства: $x\in(-20;-18)\cup[7;+\infty)$.

9.1. Найдите наибольшее значение выражения $\left(\sqrt{8-4\sqrt{3}}\sin x-3\sqrt{2(1+\cos 2x)}-2\right)\cdot\left(3+2\sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 33. **Решение.** Положим $f(x)=\sqrt{8-4\sqrt{3}}\sin x-3\sqrt{2(1+\cos 2x)}-2$, $g(y)=3+2\sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y-\cos 2y$ и оценим эти две функции.

1) $f(x)=\sqrt{8-4\sqrt{3}}\sin x-6|\cos x|-2 \le \sqrt{8-4\sqrt{3}}\cdot 1-6\cdot 0-2 = \sqrt{8-4\sqrt{3}}-2 = \sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}-2$ $=\sqrt{6}-\sqrt{2}-2$. Указанное значение достигается, например, при $x=\frac{\pi}{2}$.

$f(x)=\sqrt{8-4\sqrt{3}}\sin x-6|\cos x|-2 = 2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x-3|\cos x|-1\right) \ge 2\left(-\sqrt{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2+3^2}-1\right)$ $=-2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}+1\right)$. Указанное значение достигается, например, при $x=\arcsin\frac{3}{\sqrt{11-\sqrt{3}}}-\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $-2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}+1\right)\le f(x)\le\sqrt{6}-\sqrt{2}-2$. Отметим также, что $-2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}+1\right)<-2<\sqrt{6}-\sqrt{2}-2<0$.

2) $g(y)=3+2\sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y-\cos 2y = -2\cos^2 y+2\sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y+4$. Положим $t=\cos y$, $t\in[-1;1]$. Тогда $g(y)=h(t)=-2t^2+2\sqrt{11-\sqrt{3}}\cdot t+4$. Максимум этой квадратичной функции достигается при $t=\frac{\sqrt{11-\sqrt{3}}}{2}>1$, поэтому на отрезке $t\in[-1;1]$ функция $h(t)$ возрастает и

$h(-1)\le h(t)\le h(1)$. Далее: $h(-1)=-2-2\sqrt{11-\sqrt{3}}+4=-2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}-1\right)$,
$h(1)=-2+2\sqrt{11-\sqrt{3}}+4=2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}+1\right)$. При этом $h(-1)<0<h(1)$.

Таким образом, $-2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}-1\right)\le g(y)\le 2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}+1\right)$.

3) Значит, максимум произведения равен $\left(-2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}+1\right)\right)\cdot\left(-2\left(\sqrt{11-\sqrt{3}}-1\right)\right)$
$=4\left(11-\sqrt{3}-1\right)=40-4\sqrt{3}\approx 33$.

9.2. Найдите наименьшее значение выражения
$\left(3\sqrt{2(1+\cos 2x)}-\sqrt{8-4\sqrt{3}}\sin x+2\right)\cdot\left(3+2\sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -33. *Указания.* Точный ответ: $4\sqrt{3}-40$.

9.3. Найдите наибольшее значение выражения
$\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}\sin x-\sqrt{2(1+\cos 2x)}-1\right)\cdot\left(3+2\sqrt{7-\sqrt{2}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 9. *Указания.* Точный ответ: $12-2\sqrt{2}$.

9.4. Найдите наименьшее значение выражения
$\left(\sqrt{2(1+\cos 2x)}-\sqrt{3-\sqrt{2}}\sin x+1\right)\cdot\left(3+2\sqrt{7-\sqrt{2}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -9. *Указания.* Точный ответ: $2\sqrt{2}-12$.

9.5. Найдите наибольшее значение выражения
$\left(\sqrt{36-4\sqrt{5}}\sin x-\sqrt{2(1+\cos 2x)}-2\right)\cdot\left(3+2\sqrt{10-\sqrt{5}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 27. *Указания.* Точный ответ: $36-4\sqrt{5}$.

9.6. Найдите наименьшее значение выражения
$\left(\sqrt{2(1+\cos 2x)}-\sqrt{36-4\sqrt{5}}\sin x+2\right)\cdot\left(3+2\sqrt{10-\sqrt{5}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -27. *Указания.* Точный ответ: $4\sqrt{5}-36$.

9.7. Найдите наибольшее значение выражения
$\left(\sqrt{9-\sqrt{7}}\sin x-\sqrt{2(1+\cos 2x)}-1\right)\cdot\left(3+2\sqrt{13-\sqrt{7}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 19. *Указания.* Точный ответ: $24-2\sqrt{7}$.

9.8. Найдите наименьшее значение выражения $\left(\sqrt{2(1+\cos 2x)}-\sqrt{9-\sqrt{7}}\sin x+1\right)\cdot\left(3+2\sqrt{13-\sqrt{7}}\cos y-\cos 2y\right)$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: -19. *Указания*. Точный ответ: $2\sqrt{7}-24$.

10.1. Найдите такое наибольшее целое *k*, что хотя бы для одного натурального $n>1000$ число $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ делится на 2^{n+k+2}.

Ответ: -3. **Решение.** Наибольшая степень двойки, входящая в $n!$, равна конечной сумме $\left[\frac{n}{2^1}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\ldots\le\frac{n}{2^1}+\frac{n}{2^2}+\ldots<n$, поэтому она не превосходит $n-1$. При этом равенство этой степени значению $n-1$ достигается на степенях двойки (например, при $n=2^{10}=1024$). Поэтому $(k+2)_{\max}=-1$, $k_{\max}=-3$.

10.2. Найдите такое наибольшее целое *n*, что хотя бы для одного натурального $m>500$ число $m!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$ делится на 2^{m+n+3}.

Ответ: -4.

10.3. Найдите такое наибольшее целое *k*, что хотя бы для одного натурального $n>2000$ число $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ делится на 2^{n+k+4}.

Ответ: -5.

10.4. Найдите такое наибольшее целое *n*, что хотя бы для одного натурального $m>10000$ число $m!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$ делится на 2^{m+n+5}.

Ответ: -6.

Отборочный этап. 10 – 11 классы. Тур 2.

Задания для разминки

::1:: Из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми равно 15 км, вышел пешеход. Одновременно навстречу ему из *B* выехал велосипедист, скорость которого в два раза больше скорости пешехода. Через час они встретились. Найдите скорость велосипедиста (в километрах в час).

{=10}

::2:: Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y=4-2x$ и координатными осями.

{=4}

Основное задание

::1.1:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 58 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 54,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 62 балла. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 22 и не больше 39 учеников?

Ответ: 28. **Решение.** Пусть в 11 «А» классе *x* учеников, а в 11 «Б» классе – *y* учеников. Тогда $\frac{54{,}5\cdot x+62\cdot y}{x+y}=58$, откуда получается $7x=8y$. Значит, $x=8n$, $y=7n$, где $n\in N$. По условию $22\le 8n\le 39$ (отсюда $n=3$ или 4), $22\le 7n\le 39$ (отсюда $n=4$ или 5), поэтому $n=4$. Значит, в классах соответственно 32 и 28 учеников.

::1.2:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 59 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 55,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 64 балла. Сколько учеников в 11 «А» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 15 и не больше 39 учеников?

{=30}

::1.3:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 57 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 52,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 62 балла. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 19 и не больше 39 учеников?

{=27}

::1.4:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 56 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 53,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 58 баллов. Сколько учеников в 11 «А» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 21 и не больше 34 учеников?

{=24}

::1.5:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 55 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 52,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 59 баллов. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 16 и не больше 39 учеников?

{=20}

::1.6:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 54 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 50,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 56 баллов. Сколько учеников в 11 «А» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 13 и не больше 34 учеников?

{=16}

::1.7:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 53 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 48,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 57 баллов. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 17 и не больше 35 учеников?

{=27}

::1.8:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 60 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 55,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 63,5 балла. Сколько учеников в 11 «А» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 15 и не больше 35 учеников?

{=21}

::1.9:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 61 баллу. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 58 баллов, а у учеников 11 «Б» класса – 64,5 балла. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 19 и не больше 34 учеников?

{=24}

::1.10:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 62 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 59,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 65,5 балла. Сколько учеников в 11 «А» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 16 и не больше 34 учеников?

{=28}

::1.11:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 63 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 60,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 66 баллов. Сколько учеников в 11 «Б» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 16 и не больше 29 учеников?

{=20}

::1.12:: Средняя оценка на ЕГЭ по математике всех выпускников школы, в которой два выпускных класса, оказалась равна 64 баллам. При этом средняя оценка у учеников 11 «А» класса составляет 62,5 балла, а у учеников 11 «Б» класса – 66,5 балла. Сколько учеников в 11 «А» классе, если известно, что по нормативам в классе должно быть не меньше 16 и не больше 34 учеников?

{=30}

::2.1:: Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{(a-4)x^2+6x-2}{x-2}=0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений *a*.

Ответ: 5. **Решение.** Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}(a-4)x^2+6x-2=0,\\ x-2\neq 0.\end{cases}$ При $a=4$ первое уравнение системы будет линейным, и система имеет один корень $x=3$. При остальных a первое уравнение квадратное, его дискриминант $\frac{D}{4}=9+2(a-4)=2a+1$. Поэтому при $a=-\frac{1}{2}$ система имеет один корень $x=\frac{2}{3}$. Кроме того, один корень система имеет тогда, когда первое уравнение имеет два корня, один из которых равен 2. Это будет при $(a-4)\cdot 2^2+6\cdot 2-2=0$, то есть при $a=\frac{3}{2}$. Таким образом, сумма всех значений a равна: $4-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=5$.

::2.2:: Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{(a-1)x^2-4x+1}{x-1}=0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений *a*.

{=10}

::2.3:: Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{(a-6)x^2+8x-4}{x-2}=0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений *a*.

{=11}

::2.4:: Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{(a+1)x^2-6x+2}{x-2}=0$ имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений *a*.

{=4}

::3.1:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 50 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зеленые, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? Саквояжи одного цвета считаются идентичными.

Ответ: 23426. **Решение.** Докажем, что число различных наборов из *n* саквояжей *k* цветов (в данной задаче $n=50$, $k=4$) равно $C_{n+k-1}^{k-1}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\cdot n!}$.

Старуха Шапокляк может взять школьную тетрадку в клетку и отметить там ряд из $n+k-1$ клеток. Затем в произвольных $k-1$ разных клетках этого ряда она ставит крестики. Передав этот листок продавцу, она ставит условие: число клеток, лежащее слева от первого крестика, равно числу саквояжей первого цвета; число клеток, лежащих между первым и вторым крестиком, равно числу саквояжей второго цвета, и т. д.; число клеток, лежащее правее последнего крестика, равно числу саквояжей последнего (k-ого) цвета. При этом, если левее первого крестика, между какими-либо двумя крестиками, или правее k-го крестика нет клеток, значит, в покупке не будет саквояжей соответствующего цвета.

Тем самым число вариантов покупки равно числу способов расстановки $k-1$ крестика на $n+k-1$ различных позициях, то есть равно C_{n+k-1}^{k-1}, откуда и получаем ответ при $n=50$, $k=4$: $C_{53}^{3}=\dfrac{53!}{50!\cdot 3!}=\dfrac{53\cdot 52\cdot 51}{2\cdot 3}=23426$.

::3.2:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 48 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=1225}

::3.3:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 50 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=1326}

::3.4:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 49 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зеленые, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? Саквояжи одного цвета считаются идентичными.

{=22100}

::3.5:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 48 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зеленые, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=20825}

::3.6:: Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 52 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? (Саквояжи одного цвета считаются идентичными).

{=1431}

::4.1:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 71 дают в остатке 27, а при делении на 79 дают в остатке 40. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

Ответ: 9639. **Решение.** Из условия задачи следует, что искомое число равно $x=71m+27$ или $x=79n+40$. Отсюда получается уравнение в целых числах $71m+27=79n+40$, или $71m-79n=13$. Решение последнего уравнения (его можно найти разными путями): $m=28+79k$, $n=25+71k$, где k – произвольное целое число. Поэтому искомые числа: $x=2015+5609k$. Из них четырёхзначными являются: 2015 и 7624. Их сумма: 9639.

::4.2:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 79 дают в остатке 39, а при делении на 83 дают в остатке 22. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=10585}

::4.3:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 61 дают в остатке 53, а при делении на 71 дают в остатке 17. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=8341}

::4.4:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 67 дают в остатке 27, а при делении на 73 дают в остатке 72. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=8831}

::4.5:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 59 дают в остатке 45, а при делении на 71 дают в остатке 16. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=8055}

::4.6:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 61 дают в остатке 20, а при делении на 67 дают в остатке 41. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=7787}

::4.7:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 79 дают в остатке 17, а при делении на 89 дают в остатке 64. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=10541}

::4.8:: Найдите все четырёхзначные числа, которые при делении на 73 дают в остатке 32, а при делении на 79 дают в остатке 52. В ответ запишите сумму всех таких чисел.

{=9189}

::5.1:: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\sin x \cos x + \sin^3 x \cos x + \frac{\sin^5 x}{\cos x}\right)^2 + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \cos(8\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких *y*, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: 8058. **Решение.** Выражение в первой скобке уравнения равно $\sin x \cos x + \sin^3 x \cos x + \frac{\sin^5 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}\left(\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x\right)$ $= \mathrm{tg}x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\right) = \mathrm{tg}x$, второе слагаемое уравнения равно $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \mathrm{ctg}^2 x - 1$. Поэтому исходное уравнение можно записать в виде $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 1 - \cos(8\pi y)$. Так как левая часть этого уравнения не меньше 2, а правая не больше 2, то $\mathrm{tg}^2 x = 1$, $\cos(8\pi y) = -1$. Значит, $8\pi y = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. Поэтому $y = \frac{1+2k}{8}$, $k \in Z$. Условию $y \in [2014; 2015]$ удовлетворяют $y = 2014 + \frac{1}{8}$, $y = 2014 + \frac{3}{8}$, $y = 2014 + \frac{5}{8}$, $y = 2014 + \frac{7}{8}$. Сумма этих значений равна $2014 \cdot 4 + \frac{1+3+5+7}{8} = 8058$.

::5.2:: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\cos x \sin x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^5 x}{\sin x}\right)^2 - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \sin(9\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких *y*, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

{=8058}

::5.3:: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\sin x \cos^3 x + \sin^3 x \cos x + \frac{\sin^3 x}{\cos x}\right)^2 + \frac{2\cos 2x + 2}{\sin^2 2x} - 3\sin(8\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

{=8057,75}

::5.4:: Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\cos x \sin^3 x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^3 x}{\sin x}\right)^2 - \frac{2\cos 2x - 2}{\sin^2 2x} + 3\cos(10\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

{=10072,5}

::6.1:: В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом *BC* = 36, *MN* = 12. В треугольник вписана окружность с центром *O*. Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника *BOC* окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=31,18}

Решение. В общем виде (для всех вариантов) задача записывается так:

В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом $BC = ka$, $MN = a$ $(k > 1)$. В треугольник вписана окружность с центром *O*. Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника *BOC* окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

Так как центр вписанной окружности *O* – точка пересечения биссектрис, то $\angle BOC = 180° - \frac{\angle C + \angle B}{2} = 180° - \frac{180° - \angle A}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \angle BAC$. Поэтому радиус окружности, описанной около треугольника *BOC*, равен $R = \frac{BC}{2\sin \angle BOC} = \frac{ka}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Значит, радиус тем больше, чем меньше знаменатель, то есть чем больше угол α.

При этом треугольник *AMN* подобен треугольнику *ABC* ($\angle BAC$ – общий и $\frac{AM}{AB} = |\cos\alpha| = \frac{AN}{AC}$) с коэффициентом подобия $|\cos\alpha| = \frac{NM}{BC} = \frac{1}{k}$ (отметим, что знак модуля у косинуса здесь связан с тем, что угол α может быть, как острым, так и тупым).

Поэтому радиус описанной окружности максимален, если угол α тупой, то есть $\cos\alpha = -\frac{1}{k}$. Значит, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{2k}}$, а радиус равен $R = \frac{ka\sqrt{2k}}{2\sqrt{k-1}}$.

::6.2:: В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом *BC* = 12, *MN* = 8. В треугольник вписана окружность с центром *O*. Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника *BOC* окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=14,70}

::6.3:: В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом *BC* = 20, *MN* = 4. В треугольник вписана окружность с центром *O*. Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника *BOC* окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=15,81}

::6.4:: В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом *BC* = 24, *MN* = 6. В треугольник вписана окружность с центром *O*. Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника *BOC* окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=19,60}

::6.5:: В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом *BC* = 18, *MN* = 12. В треугольник вписана окружность с центром *O*. Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника *BOC* окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=22,05}

::6.6:: В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом *BC* = 20, *MN* = 8. В треугольник вписана окружность с центром *O*. Какое наибольшее значение может принимать при данных условиях радиус описанной около треугольника *BOC* окружности? При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=18,26}

::7.1:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_2^2 3}{(x+10)^2} - 2\frac{\log_3^2 16}{(x-10)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-100}}\right)^2$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_2 3 = 1{,}585$.

Ответ: -19. **Решение.** После замены переменных $a = \frac{\log_2 3}{x+10}$, $b = \frac{\log_3 16}{x-10}$ получается однородное уравнение $a^2 - 2b^2 = ab$, сводящееся к квадратному: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 2 = 0$. Это уравнение имеет корни 2 и -1. Поэтому либо $\frac{x-10}{x+10} = 8\cdot\log_3^2 2$, либо $\frac{x-10}{x+10} = -4\cdot\log_3^2 2$. Второе уравнение не имеет решений в силу ОДЗ. А из первого получаем решение $x = \frac{10\left(1+8\cdot\log_3^2 2\right)}{1-8\cdot\log_3^2 2} \approx -19{,}15508$. Ближайшее целое: -19.

::7.2:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_3^2 5}{(x+10)^2} - 2\frac{\log_5^2 81}{(x-10)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-100}}\right)^2$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_3 5 = 1{,}465$.

$\{=-17\}$

::7.3:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_3^2 5}{(x+11)^2} - 2\frac{\log_5^2 81}{(x-11)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-121}}\right)^2$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_3 5 = 1{,}465$.

$\{=-19\}$

::7.4:: Найдите сумму корней уравнения $\frac{\log_2^2 3}{(x+10)^2} - 2\frac{\log_3^2 16}{(x-10)^2} + \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-100}}\right)^2 = 0$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_2 3 = 1{,}585$.

$\{=-44\}$

::7.5:: Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{\log_3^2 5}{(x+11)^2}-2\dfrac{\log_5^2 81}{(x-11)^2}+\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-121}}\right)^2=0$ и укажите в ответе ближайшее к ней целое число. Для округления можно принять $\log_3 5=1,465$.

{=−36}

::8.1:: Найдите все значения *x*, при которых числа $6\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$ и $4\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений *x* выберите принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3}{2};12\right]$ и запишите в ответ их сумму.

Ответ: 47. **Решение.** Характеристическое свойство арифметической прогрессии приводит к уравнению $6\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)+4\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=2\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$, которое после замены $\alpha=\dfrac{\pi x}{6}$ сводится к уравнению $3\mathrm{tg}\alpha+2\mathrm{ctg}3\alpha=\mathrm{tg}2\alpha$. Оно переписывается в виде $2(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}3\alpha)=\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}\alpha\ \Leftrightarrow$

$$\frac{2\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sin 3\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2\cos^2 2\alpha=\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha,\\ \cos 2\alpha\neq 0,\\ \cos\alpha\neq 0.\end{cases}$$

Уравнение системы равносильно уравнению $4\cos^2 2\alpha=\cos 2\alpha-\cos 4\alpha\ \Leftrightarrow$ $6\cos^2 2\alpha-\cos 2\alpha-1=0$, имеющему решения $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$ и $\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{3}$. Отсюда $2\alpha=\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\alpha=\pi\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi n$, $k,n\in Z$, что приводит к решениям: $x=\pm1+6k$. $x=3\pm\dfrac{1}{\pi}\cdot\arccos\dfrac{1}{3}+6n$, $k,n\in Z$. Так как $\dfrac{1}{\pi}\cdot\arccos\dfrac{1}{3}\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, то на указанный в условии промежуток попадают корни: 7; 5; 11; $3+\dfrac{1}{\pi}\cdot\arccos\dfrac{1}{3}$; $9+\dfrac{1}{\pi}\cdot\arccos\dfrac{1}{3}$; $3-\dfrac{1}{\pi}\cdot\arccos\dfrac{1}{3}$; $9-\dfrac{1}{\pi}\cdot\arccos\dfrac{1}{3}$. Их сумма равна 47.

::8.2:: Найдите все значения *x*, при которых числа $4\mathrm{ctg}(\pi x)$, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)$ и $6\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений *x* выберите принадлежащие отрезку $[3;9]$ и запишите в ответ их сумму.

{=48}

::8.3:: Найдите все значения *x*, при которых числа $6\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, $\mathrm{tg}(\pi x)$ и $4\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi x}{2}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений *x* выберите принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9}{2};36\right]$ и запишите в ответ их сумму.

{=1275,67}

::8.4:: Найдите все значения *x*, при которых числа $4\mathrm{ctg}(2\pi x)$, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$ и $6\mathrm{tg}\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений *x* выберите принадлежащие отрезку $[6;18]$ и запишите в ответ их сумму.

{=384}

::9.1:: Каждая из сторон неравнобедренного треугольника может принимать одно из 16-ти различных фиксированных значений, наибольшее из которых не превосходит удвоенного наименьшего. Каково максимальное количество различных тупоугольных треугольников среди указанных?

Ответ: 360. **Решение.** Для определенности считаем, что длина меньшего отрезка равна 1. Разделим отрезки на три группы:

A: состоит из m отрезков с длинами из полуинтервала $\left[1;\sqrt{2}\right)$;

B: состоит из n отрезков с длинами из полуинтервала $\left[\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$;

C: состоит из k отрезков с длинами из отрезка $\left[\sqrt{3};2\right]$.

По условию $m+n+k=16$. Далее рассмотрим десять «случаев» выбора трёх отрезков из этих групп A, B, C.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
B	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
C	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0

Если a, b, c – длины трёх отрезков из случаев «1», «2», «3», «4», «5», «7» или «10», то выполнены все три неравенства (проверка делается перебором): $a^2+b^2\ge c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$. Поэтому треугольник со сторонами a, b, c – не будет тупоугольным.

Значит, осталось рассмотреть только случаи: «6», «8», «9».

В случае «6» из 16 данных отрезков можно всего составить $mnk=mn(16-m-n)$ треугольников.

В случае «8» треугольников будет: $\dfrac{m(m-1)}{2}(16-m-n)$.

В случае«9» треугольников будет: $\dfrac{m(m-1)}{2}n$.

Итого во всех трёх случаях «6», «8», «9» число треугольников равно:

$$N(m,n)=mn(16-m-n)+\frac{m(m-1)}{2}(16-m).$$

Так как $n(16-m-n)\le\left(\dfrac{n+16-m-n}{2}\right)^2=\dfrac{(16-m)^2}{4}$, то

$$N(m,n)\le\frac{m(16-m)^2}{4}+\frac{m(m-1)}{2}(16-m)=\frac{m(16-m)(16-m+2m-2)}{4}=\frac{m(16-m)(m+14)}{4}.$$

Далее ищем максимум функции $f(m)=m(16-m)(m+14)$ для натуральных m. Локальный максимум этой функции: $m=\dfrac{28}{3}=9\dfrac{1}{3}$. Поэтому максимум достигается либо при $m=9$, либо при $m=10$.

Так как $N(9,n)=9n(7-n)+9\cdot 4\cdot 7=9\left(7n-n^2+28\right)$, то максимум здесь достигается при $n=3$ и при $n=4$ и равен 360.

Так как $f(10)=\dfrac{10\cdot 6\cdot 24}{4}=360$, то $N(10,n)\le 360$.

Значит, из 16 отрезков можно составить не более 360 треугольников.

Осталось показать, что существует ситуация, когда все эти треугольники тупоугольные. Пример: группа A состоит из $m=9$ отрезков с длинами от 1 до 1,05; группа B состоит из $n=4$ отрезков с длинами от 1,5 до 1,6; группа C состоит из $k=3$ отрезков с длинами от 1,95 до 2.

В случае «6» для трёх отрезков a, b, c получаем: $a^2+b^2\le 1{,}05^2+1{,}6^2<1{,}95^2\le c^2$.

В случае «8» для трёх отрезков a, b, c: $a^2+b^2\le 1{,}05^2+1{,}05^2<1{,}5^2<c^2$; в случае 9: $a^2+b^2\le 1{,}05^2+1{,}05^2<1{,}5^2\le b^2$.

Значит, все 360 треугольников тупоугольные.

::10.1:: Вокруг плоского четырехугольника *ABCD* со сторонами $AB=10$, $BC=12$, $CD=16$ и $AD=10\sqrt{3}$ можно описать окружность. Дана такая точка *S*, что $SA=12$, $SB=14$, $SC=13$. Найдите косинус угла между прямыми *SA* и *BC*. При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 0,92. **Решение.** Обозначим $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=AD$, $x=AC$, $a'=SA$, $b'=SB$, $c'=SC$.

Тогда по теореме косинусов находим $x^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\varphi)$. Откуда $\cos\varphi=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. Следовательно, $x^2=\dfrac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}$.

Для нашего случая $x^2=\dfrac{4(417+244\sqrt{3})}{3+4\sqrt{3}}=96\sqrt{3}+172$ (можно найти и $x=8+6\sqrt{3}$, хотя для решения задачи это и не нужно).

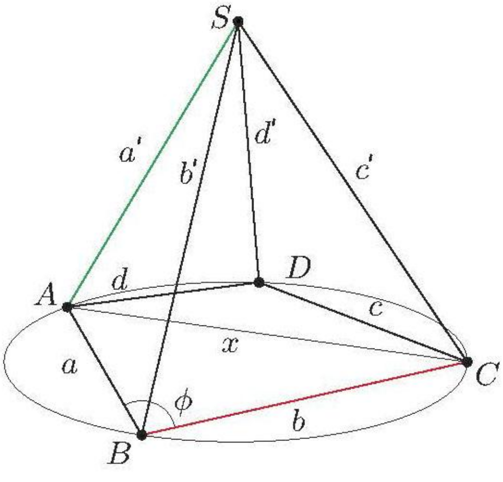


Рис. 1:

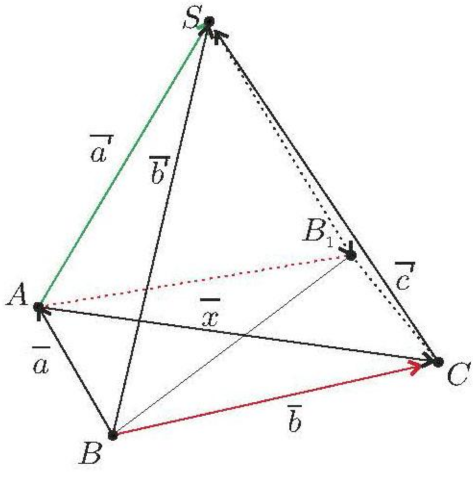


Рис. 2:

Получается, что $\angle ABC=\arccos\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$, $\angle SBA=\arccos\dfrac{19}{35}$, $\angle SBC=\arccos\dfrac{57}{112}$. Так как $\angle ABC$ не равен сумме углов $\angle SBA+\angle SBC$, то *S* не принадлежит плоскости *ABCD*.

Поэтому $SABC$ – пирамида, в которой известны все ребра, и искомый угол между скрещивающимися ребрами тетраэдра находится по известной формуле $\cos\delta = \dfrac{(b')^2 + x^2 - a^2 - (c')^2}{2a'b}$. Получается $\cos\delta = \dfrac{161 + 76\sqrt{3}}{32(3 + 4\sqrt{3})} = \dfrac{33 + 32\sqrt{3}}{96} = \dfrac{11}{32} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.921...$

Различные доказательства приведенной выше формулы для косинуса угла между скрещивающимися рёбрами можно найти в литературе. Например, её можно доказать так. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{x} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{a}' = \overrightarrow{AS}$, $\vec{c}' = \overrightarrow{CS}$. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCB_1$. Тогда $\overrightarrow{SB'} = \vec{b}' - \vec{c} - \vec{a}$.

Из треугольника AB_1S получаем $(\vec{b}' - \vec{b} - \vec{a}, \vec{b}' - \vec{b} - \vec{a}) = (a')^2 + b^2 - 2a'b\cos\delta$.

Поскольку $2\vec{b}'\cdot\vec{b} = (b')^2 + b^2 - (c')^2$, $2\vec{b}'\cdot\vec{a} = (b')^2 + a^2 - (a')^2$, $2\vec{b}\cdot\vec{a} = b^2 + a^2 - x^2$, то подставив эти равенства в уравнение $(b')^2 + b^2 + a^2 - 2\vec{b}'\cdot\vec{b} - 2\vec{b}'\cdot\vec{a} + 2\vec{b}\cdot\vec{a} = (a')^2 + b^2 - 2a'b\cos\delta$, получаем выражение для $\cos\delta$: $\cos\delta = \dfrac{(b')^2 + x^2 - a^2 - (c')^2}{2a'b}$.

::10.2:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 30$, $BC = 17\sqrt{3}$, $CD = 17$ и $AD = 16$ можно описать окружность. Дана такая точка *S*, что $SA = 34$, $SB = 35$, $SC = 36$. Найдите косинус угла между прямыми *SA* и *BC*. При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,07}

::10.3:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 14$, $BC = 25\sqrt{3}$, $CD = 25$ и $AD = 48$ можно описать окружность. Дана такая точка *S*, что $SA = 43$, $SB = 42$, $SC = 41$. Найдите косинус угла между прямыми *SA* и *BC*. При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,60}

::10.4:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 24$, $BC = 13\sqrt{3}$, $CD = 13$ и $AD = 10$ можно описать окружность. Дана такая точка *S*, что $SA = 17$, $SB = 18$, $SC = 16$. Найдите косинус угла между прямыми *SA* и *BC*. При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,11}

::10.5:: Вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 70$, $BC = 37\sqrt{3}$, $CD = 37$ и $AD = 24$ можно описать окружность. Дана такая точка *S*, что $SA = 52$, $SB = 50$, $SC = 51$. Найдите косинус угла между прямыми *SA* и *BC*. При необходимости округлите это число до двух знаков после запятой.

{=0,28}