Материалы заданий отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Тур 3

Участник олимпиады получал две разминочные задачи (каждая оценивалась в 1 балл) и десять задач основного задания (первые две задачи оценивались в 9 баллов, остальные – в 10 баллов). Таким образом, максимально возможная сумма баллов – 100.

При этом каждая из указанных задач предлагалась в нескольких вариантах. Подбор задач для каждого участника производился случайным образом, в результате чего варианты заданий у всех были разные.

Задание для разминки

1. Найдите 15% от 9.

Ответ: 1,35. **Решение.** $9\cdot\frac{15}{100}=1{,}35$.

2. Карандаш весит 10 грамм. Сколько граммов велит другой карандаш, все размеры которого в 3 раза больше?

Ответ: 270. **Решение.** Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому другой карандаш весит $10\cdot 3^3=270$ грамм.

Основное задание

(первое число в номере задачи – порядковый номер задачи; второе число – номер варианта)

1.1. Маша задумала 10-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 9-значного числа равен 7. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 5. **Решение.** По признаку делимости на 9 остаток от деления суммы цифр числа на 9 равен 3 (поэтому сумма цифр этого числа равна $9n+3$), а остаток от деления суммы цифр получившегося числа на 9 равен 7 (поэтому сумма цифр получившегося числа равна $9k+7$). Если зачеркнутая цифра равна *x*, то $9n+3-x=9k+7$, отсюда $x=9(n-k)+3-7$, то есть зачеркнутая цифра равна $9+3-7=5$.

1.2. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 4.

1.3. Маша задумала 9-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 8-значного числа равен 7. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 7.

1.4. Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 2.

1.5. Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 4.

1.6. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 5. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 7.

1.7. Маша задумала 9-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 8-значного числа равен 4. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 8.

1.8. Маша задумала 10-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 9-значного числа равен 6. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 8.

1.9. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 5. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 6.

1.10. Маша задумала 13-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 12-значного числа равен 7. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 3.

1.11. Маша задумала 11-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 10-значного числа равен 6. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 4.

1.12. Маша задумала 10-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 1. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 9-значного числа равен 4. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша. Запишите эту цифру в ответ.

Ответ: 6.

2.1. Трапеция *ABCD* с основанием $AD = 6$ вписана в окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *AN*, если $AB \perp MD$ и $AM = 3$.

Ответ: 12. **Решение.** Условие $AB \perp MD$ означает, что $\angle ABD = 90°$, то есть основание *AD* – диаметр окружности. Так как трапеция вписанная, то она равнобедренная. ΔDNA и ΔDAC подобны как прямоугольные с общим углом. Из равенства углов $\angle CAD$ и $\angle BDA$ вытекает подобие ΔDAC и ΔMDA. Значит, $\Delta DNA \sim \Delta MDA$, то есть $\frac{AN}{AD} = \frac{AD}{AM} = 2$, отсюда $AN = 12$.

2.2. Трапеция *ABCD* с основанием $AD = 4$ вписана в окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *AM*, если $AB \perp MD$ и $AN = 8$.

Ответ: 2.

2.3. Около трапеции *ABCD* с основанием $AD = 24$ описана окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *ND*, если $AB \perp MD$ и $MD = 30$.

Ответ: 40.

2.4. Около трапеции *ABCD* с основанием $AD = 12$ описана окружность. Касательная к окружности в точке *A* пересекает прямые *BD* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *MD*, если $AB \perp MD$ и $ND = 20$.

Ответ: 15.

3.1. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 25$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 10. **Решение.** Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = a$ в точках с координатами $\left(\pm\sqrt{a};\, a\right)$. Каждая из точек пересечения указанной в условии окружности и параболы имеет координаты $\left(x;\, x^2\right)$. Для нее расстояние до прямой $y = a$ равно $\left|a - x^2\right|$, расстояние до оси ординат равно $|x|$, а расстояние до точки пересечения этих прямых (центра окружности) равно $\sqrt{a}$. По теореме Пифагора $x^2 + \left(a - x^2\right)^2 = a$, то есть $\left(a - x^2\right)\left(a - x^2 - 1\right) = 0$, и, помимо двух точек с координатами $\left(\pm\sqrt{a};\, a\right)$, окружность и парабола пересекаются также в двух точках $\left(\pm\sqrt{a-1};\, a-1\right)$, лежащих на прямой $y = a - 1$.

Таким образом, указанный в условии многоугольник является трапецией с высотой 1 и основаниями $2\sqrt{a}$ и $2\sqrt{a-1}$. Его площадь равна $\sqrt{a} + \sqrt{a-1}$. При $a = 25$ получаем $5 + \sqrt{24} \approx 9{,}898979\ldots$.

3.2. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 9$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 6.

3.3. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 16$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 8.

3.4. Парабола $y = x^2$ пересекается с прямой $y = 36$. На отрезке между точками пересечения параболы и прямой как на диаметре построена окружность. Найдите площадь выпуклого многоугольника, вершины которого – точки пересечения данной окружности и параболы. В ответе укажите ближайшее к величине этой площади целое число.

Ответ: 12.

4.1. Решите уравнение $\left(x^2 - 2x + 4\right)^{x^2-2x+3} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 6. **Решение.** Так как $x^2 - 2x + 3 > 0$, то $x^2 - 2x + 4 > 1$. Функция $f\left(z\right) = z^{z-1}$ возрастает при $z > 1$ (если $1 < z_1 < z_2$, то $f\left(z_1\right) = z_1^{z_1-1} < z_1^{z_2-1} < z_2^{z_2-1} = f\left(z_2\right)$. Поэтому исходное уравнение, имеющее вид $f\left(x^2 - 2x + 4\right) = f\left(5\right)$, будет равносильно уравнению $x^2 - 2x + 4 = 5$. Отсюда $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Сумма квадратов корней уравнения равна $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 6$.

4.2. Решите уравнение $\left(x^2 - 4x + 7\right)^{x^2-4x+6} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 12.

4.3. Решите уравнение $\left(x^2 - 6x + 12\right)^{x^2-6x+11} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 22.

4.4. Решите уравнение $\left(x^2 - 8x + 19\right)^{x^2-8x+18} = 625$. В ответе укажите сумму квадратов всех его корней. Если корней нет, поставьте 0.

Ответ: 36.

5.1. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2013\cdot 2014}{(1+2+3+...+2014)\cdot\dfrac{1}{5}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 6710. **Решение.** Подсчитаем сумму в числителе: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k$ $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Здесь использована известная формула для суммы квадратов чисел натурального ряда, которую можно доказать разными способами (эти доказательства легко можно найти в литературе).

Значит, указанная в условии дробь равна $\dfrac{2013\cdot 2014\cdot 2015\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 2014\cdot 2015}=\dfrac{2013\cdot 10}{3}=6710$.

5.2. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2014\cdot 2015}{(1+2+3+...+2014)\cdot\dfrac{1}{4}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 5376.

5.3. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2013\cdot 2014}{(1+2+3+...+2013)\cdot\dfrac{1}{6}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 8060.

5.4. Вычислите: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2014\cdot 2015}{(1+2+3+...+2015)\cdot\dfrac{1}{3}}$. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 4028.

6.1. Найдите наибольший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)-\cos(\pi x)\right|=\left\|\sin(2\pi x)\right|-\left|\cos(\pi x)\right\|$, принадлежащий промежутку $\left(\frac{1}{4};2\right)$.

Ответ: 1,5. **Решение.** Так как $\left|A-B\right|=\left\|A\right|-\left|B\right\| \Leftrightarrow A^2-2AB+B^2=A^2-2\left|AB\right|+B^2 \Leftrightarrow$ $AB=\left|AB\right| \Leftrightarrow AB\geq 0$, то $\sin 2\pi x\cdot\cos\pi x\geq 0 \Leftrightarrow 2\sin\pi x\cdot\cos^2\pi x\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\pi x=0,\\ \sin\pi x\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{c}\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ 2\pi n\leq\pi x\leq\pi+2\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}+2p,\\ 2n\leq x\leq 1+2n.\end{array}\right.$ В заданный в условии промежуток попадают $x\in\left(\frac{1}{4};1\right]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

6.2. Найдите наименьший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)+\cos(\pi x)\right|=\left\|\sin(2\pi x)\right|-\left|\cos(\pi x)\right\|$, принадлежащий промежутку $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $-1,5$.

6.3. Найдите наименьший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)-\sin(\pi x)\right|=\left\|\sin(2\pi x)\right|-\left|\sin(\pi x)\right\|$, принадлежащий промежутку $\left(\frac{3}{4};3\right)$.

Ответ: 1.

6.4. Найдите наибольший корень уравнения

$\left|\sin(2\pi x)+\sin(\pi x)\right|=\left\|\sin(2\pi x)\right|-\left|\sin(\pi x)\right\|$, принадлежащий промежутку $\left(-4;-\frac{7}{4}\right)$.

Ответ: -2.

7.1. Команда спортсменов, третья часть которых – сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулера, вмещающий не более 10 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 45%, но меньше 50% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

Ответ: 5. **Решение.** Если было *x* сноубордистов, а на фуникулере спустились *y* человек, то всего было 3*x* спортсменов и $\begin{cases} \frac{9}{20}=\frac{45}{100}<\frac{3x-y}{3x}<\frac{50}{100}=\frac{10}{20}, \\ y\le 10 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x<\frac{20}{30}y\le\frac{20}{3}<7, \\ y\in\left(\frac{30}{20}x;\frac{33}{20}x\right). \end{cases}$$

Перебирая значения $x=1,2,\dots,6$, находим, что только при $x=5$ полученный промежуток $y\in\left(\frac{30}{20}x;\frac{33}{20}x\right)$ содержит целое число ($y=8$).

7.2. Команда спортсменов, третья часть которых – сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулёра, вмещающий не более 11 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 40%, но меньше 44% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

Ответ: 4.

7.3. Команда спортсменов, третья часть которых – сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулёра, вмещающий не более 12 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 20%, но меньше 24% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

Ответ: 3.

8.1. На боковом ребре SB правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ выбрана точка P так, что SP в 10 раз больше, чем PB. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку P параллельно ребрам SE и FE. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 116,44. **Решение.** Обозначим $SP = cx$, $PB = bx$ (для исходной задачи $c = 10$, $b = 1$). Проведем параллельно EF прямую из точки P, обозначим пересечение этой прямой с ребром SC через Q. Через точки P и Q проведём плоскости, перпендикулярные PQ (рис. 1). Они, очевидно, будут перпендикулярны плоскости основания.

Отсекаемое тело состоит из призмы (рис. 1) и двух пирамид (рис. 2).

Обозначим: H и H_P – перпендикуляры, проведенные на основание из точек S и P соответственно; $S_\perp$ и $P_\perp$ – основания этих перпендикуляров; B_1 – точка пересечения BF с плоскостью сечения; a – длина ребра основания.

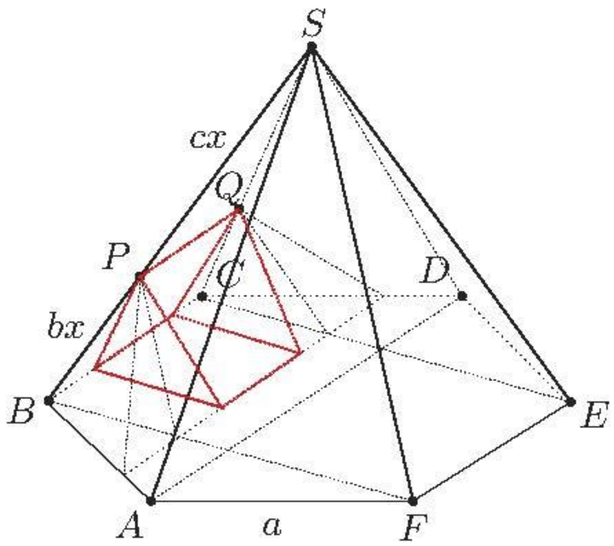


Рис. 1

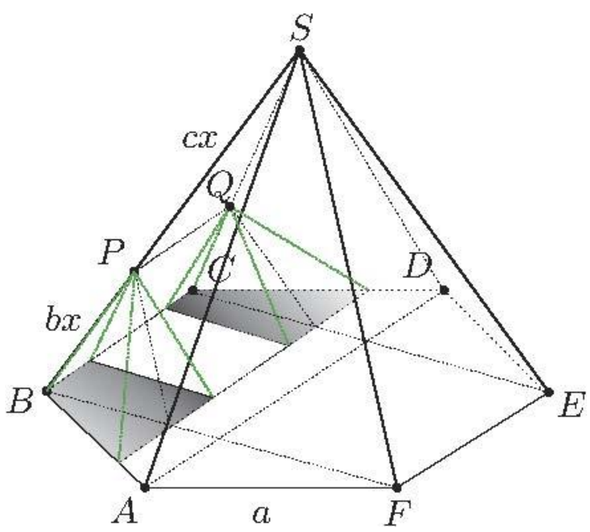


Рис. 2

Тогда получаем (обозначения см. на рис. 1 – 3):

$H_P = \dfrac{b}{b+c} H$ (из подобия $\Delta BPP_\perp$ и $\Delta BSS_\perp$);

$BB_1 = \dfrac{b}{b+c} \cdot BF = \dfrac{b}{b+c} \cdot \sqrt{3} a$ (из подобия ΔBPB_1 и ΔBSF)

$$A_1B_1 = \frac{BB_1}{BG}\cdot AG = \frac{2b}{b+c}\cdot AG = \frac{ab}{b+c}$$ (из подобия ΔA_1BB_1 и ΔABG);

$$PQ = \frac{c}{b+c}BC = \frac{ac}{b+c}$$ (из подобия ΔSPQ и ΔSBC).

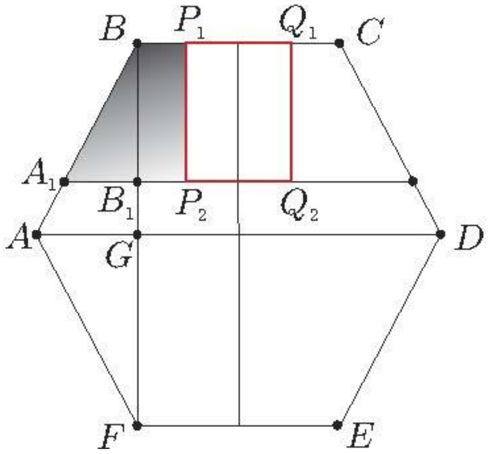


Рис. 3

Объём исходной пирамиды равен: $V = V_{ABCDEF} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}H$;

Объём призмы (см. рис. 1) равен: $V_{приз.} = PQ\cdot S_{PP_1P_2} = PQ\cdot\frac{H_P}{2}\cdot BB_1 = \frac{b^2c}{2(b+c)^3}\cdot\sqrt{3}a^2H$.

Так как $S_{A_1BP_1P_2} = S_{A_1BB_1} + S_{B_1BP_1P_2} = BB_1\left(\frac{A_1B_1}{2} + BP_1\right) = BB_1\left(\frac{A_1B_1}{2} + \frac{a-PQ}{2}\right)$

$= \left(\frac{b}{b+c}\right)^2\cdot\sqrt{3}a^2$, то объём каждой из двух пирамид (см. рис. 2) с вершинами в точках P и Q

соответственно равен: $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{A_1BP_1P_2}\cdot H_P = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{b+c}\right)^3\cdot\sqrt{3}a^2H$.

Следовательно, $$\frac{V_{больш.часть}}{V_{меньш.часть}} = \frac{V - V_{приз.} - 2V_{пир.}}{V_{приз.} + 2V_{пир.}} = \frac{(b+c)^3 - b^2\left(c + \frac{4}{3}b\right)}{b^2\left(c+\frac{4}{3}b\right)}.$$

Обозначив, $\frac{c}{b} = n$, получим искомое отношение: $\dfrac{(1+n)^3 - n - \frac{4}{3}}{n + \frac{4}{3}}$. По условию $n = 10$,

тогда ответ: $\frac{3959}{34} = 116{,}44117\ldots$

8.2. На боковом ребре *SB* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* выбрана точка *P* так, что *SP* в 13 раз больше, чем *PB*. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку *P* параллельно ребрам *SE* и *FE*. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 190,44.

8.3. На боковом ребре *SB* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* выбрана точка *P* так, что *SP* в 9 раз больше, чем *PB*. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку *P* параллельно ребрам *SE* и *FE*. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 95,77.

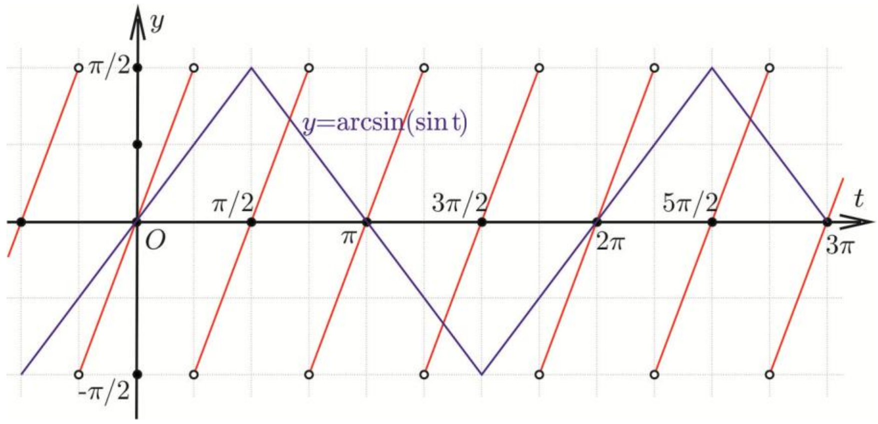
8.4. На боковом ребре *SB* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* выбрана точка *P* так, что *SP* в 6 раз больше, чем *PB*. Пирамиду рассекли на две части плоскостью, проходящей через точку *P* параллельно ребрам *SE* и *FE*. Найдите отношение объема большей из этих частей к объему меньшей части. В случае необходимости ответ округлите с точностью до сотых.

Ответ: 45,77.

9.1. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{13\pi^2+12\pi x-12x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{13\pi^2}{4}+3\pi x-3x^2}\right).$$

Ответ: 9. **Решение.** Сделаем замену $t=\sqrt{\frac{13\pi^2}{4}+3\pi x-3x^2}$. Так как $\frac{13\pi^2}{4}+3\pi x-3x^2=4\pi^2-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$, то $0\le t\le 2\pi$. Исходное уравнение после указанной замены переходит в уравнение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2t)=\arcsin(\sin t)$.



Графики функций $f(t)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2t)$ и $g(t)=\arcsin(\sin t)$ на отрезке $[0;2\pi]$ имеют пять точек пересечения: $t_1=0$, $t_2\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $t_3=\pi$, $t_4\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ и $t_5=2\pi$.

Значение t_2 находится из системы: $\begin{cases} y=\pi-t, \\ y=2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow t_2=\frac{2\pi}{3}$.

Аналогично находим t_4: $\begin{cases} y=\pi-t, \\ y=2\left(t-\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow t_4=\frac{4\pi}{3}$.

Уравнения $\sqrt{4\pi^2-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=t_k$ имеют по два различных решения при $k=1, 2, 3, 4$. Уравнение $\sqrt{4\pi^2-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=t_6$ имеет единственное решение. Итого получаем 9 решений.

9.2. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{\pi^2+16\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+4\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 8.

9.3. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{35\pi^2+4\pi x-4x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{35\pi^2}{4}+\pi x-x^2}\right).$$

Ответ: 13.

9.4. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{17\pi^2+16\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{17\pi^2}{4}+4\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 10.

9.5. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{23\pi^2}{4}+4\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{23\pi^2}{16}+\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 6.

9.6. Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{41\pi^2+16\pi x-8x^2}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{41\pi^2}{4}+4\pi x-2x^2}\right).$$

Ответ: 16.

10.1. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-10;10]$, при каждом из которых из двойного неравенства $5\le x\le 10$ следует неравенство $ax+3a^2-12a+12>a^2\sqrt{x-1}$.

Ответ: -47. **Решение.** Пусть $t=\sqrt{x-1}$, тогда исходная задача сводится к нахождению таких значений *a*, при каждом из которых неравенство $f(t)\equiv at^2-a^2t+3a^2-11a+12>0$ выполняется при всех $t\in[2;3]$. Это означает, что минимум функции $f(t)$ на отрезке $2\le t\le 3$ положителен.

Если $a=0$, то $f(t)\equiv 12$. Если же $a\neq 0$,то возможны два случая:

а) $\begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{4}(a-2)(a-4)(a-6)>0, \\ 2\le \frac{a}{2}\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow\ 4<a<6$;

б) $\begin{cases} a\in(-\infty;\,4)\cup(6;\,+\infty), \\ f(2)=(a-3)(a-4)>0, \\ f(3)=2(6-a)>0 \end{cases} \Leftrightarrow\ a<3$.

В итоге $a\in(-\infty;\,3)\cup(4;\,6)$, и сумма искомых значений *a* на отрезке $[-10;10]$ равна:

$-10-9-8-\ldots-1+0+1+2+5\ =(-10-9-\ldots-6)-4-3=-47$.

10.2. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-12;12]$, при каждом из которых из двойного неравенства $3\le x\le 8$ следует неравенство $ax+3a^2-10a+12>a^2\sqrt{x+1}$.

Ответ: -70.

10.3. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-9;9]$, при каждом из которых из двойного неравенства $-7\le x\le -2$ следует неравенство $ax+3a^2+9a+12>a^2\sqrt{2-x}$.

Ответ: 37.

10.4. Найдите сумму всех целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-6;11]$, при каждом из которых из двойного неравенства $-1\le x\le 0$ следует неравенство $-5ax+3a^2+2a+12>a^2\sqrt{5x+9}$.

Ответ: 58.