Материалы заданий отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Тур 2

Участник олимпиады получал две разминочные задачи (каждая оценивалась в 1 балл) и десять задач основного задания (первые две задачи оценивались в 9 баллов, остальные – в 10 баллов). Таким образом, максимально возможная сумма баллов – 100.

При этом каждая из указанных задач предлагалась в нескольких вариантах. Подбор задач для каждого участника производился случайным образом, в результате чего варианты заданий у всех были разные.

Задание для разминки

1. Найдите 20% от 6.

Ответ: 1,2.

2. Найдите периметр прямоугольника, если сумма длин его различных трёх сторон может равняться 6 или 9.

Ответ: 10. Комментарии: прямоугольник со сторонами 1, 1, 4, 4.

Основное задание

(первое число в номере задачи – порядковый номер задачи; второе число – номер варианта)

1.1. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 708 цифр?

Ответ: 272. *Решение.* Однозначными и двузначными числами занумеровано 99 страниц – на это ушло $9\cdot 1+90\cdot 2=189$ цифр. Значит, осталось $708-189=519$ цифр, которыми записано $519:3=173$ трехзначных числа.

1.2. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 900 цифр?

Ответ: 336.

1.3. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 804 цифры?

Ответ: 304.

1.4. Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц (от первой до последней) потребовалось 996 цифр?

Ответ: 368.

2.1. Найдите сумму всех таких целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-2012;\,2013]$, при которых уравнение $(a-3)x^2+2(3-a)x+\dfrac{a-7}{a+2}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2011. *Решение.* При $a=3$ решений нет. При остальных *a* должно быть $\dfrac{D}{4}=(a-3)^2-\dfrac{(a-3)(a-7)}{a+2}\ge 0$. Последнее неравенство (плюс учет условия $a\ne 3$) имеет решение $a\in(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)$. Искомая сумме равна:

$-2012-2011-\ldots-5-4-3+1+4+5+\ldots2013\ =-3+1+2013\ =2011.$

2.2. Найдите сумму всех таких целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-2012;\,2013]$, при которых уравнение $(a-1)x^2-2(1-a)x+\dfrac{a-5}{a+4}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2021.

2.3. Найдите сумму всех таких целых значений *a*, принадлежащих отрезку $[-2012;\,2013]$, при которых уравнение $(a+1)x^2+2(1+a)x+\dfrac{a-3}{a+6}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2031.

2.4. Найдите сумму всех таких целых значений a, принадлежащих отрезку $[-2012;\ 2013]$, при которых уравнение $(a+2)x^2+2(2+a)x+\frac{a-2}{a+7}=0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2036.

3.1. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 1 л сока, а вечером долила в сосуд 1 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 1 л смеси и вечером долила 1 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 1 л этой смеси и вечером долила 1 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем воды в сосуде на 1,5 л больше объема оставшегося сока. Сколько литров сока выпила в итоге Маша? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 1,75. *Решение*. Пусть объем сосуда в литрах равен x. После первого дня в сосуде останется $(x-1)$ литр сока, после второго дня – $\frac{(x-1)^2}{x}$ литров сока, а после третьего дня – $\frac{(x-1)^3}{x^2}$ литров сока. Согласно условию получаем уравнение $x-\frac{(x-1)^3}{x^2}=\frac{(x-1)^3}{x^2}+1,5$ $\Leftrightarrow\ x^3-(x-1)^3=(x-1)^3+\frac{3}{2}x^2\ \Leftrightarrow\ 2x^3-9x^2+12x-4=0\ \Leftrightarrow\ (x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$. По условию $x>1$, следовательно $x=2$ (это объем сосуда), сока осталось $\frac{(2-1)^3}{2^2}=\frac{1}{4}$ литра. Значит, Маша выпила $2-0,25=1,75$ литра.

3.2. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 0,5 л сока, а вечером долила в сосуд 0,5 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 0,5 л смеси и вечером долила 0,5 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 0,5 л этой смеси и вечером долила 0,5 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем воды в сосуде на 0,75 л больше объема оставшегося сока. Сколько литров сока было первоначально в сосуде? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 1.

3.3. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 2 л сока, а вечером долила в сосуд 2 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 2 л смеси и вечером долила 2 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 2 л этой смеси и вечером долила 2 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем воды в сосуде на 3 л больше объема оставшегося сока. Сколько литров сока осталось в сосуде? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 0,5.

3.4. Из сосуда, до краев наполненного вкусным 100%-м соком, пятиклассница Маша за день отпила 1 л сока, а вечером долила в сосуд 1 л воды. На следующий день после тщательного перемешивания она выпила 1 л смеси и вечером долила 1 л воды. На третий день, снова перемешав смесь, она выпила 1 л этой смеси и вечером долила 1 л воды. Утром следующего дня родители выяснили, что объем оставшегося сока в сосуде на 1,5 л меньше объема воды. Сколько литров сока осталось в сосуде? Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 0,25.

4.1. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OC*, если $AB = 4$ и $\sin \angle C = \frac{5}{13}$.

Ответ: 9,6. Решение. Из подобия треугольников ABB_1 и OCB_1 (здесь BB_1 – высота) следует $\frac{AB}{OC} = \frac{BB_1}{CB_1} = \operatorname{tg} C$. По условию $\sin C = \frac{5}{13}$, поэтому $\cos C = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} C = \frac{5}{12}$. Значит,

$$OC = \frac{AB}{\operatorname{tg} C} = \frac{4 \cdot 12}{5} = 9{,}6.$$

4.2. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OA*, если $BC = 6$ и $\sin \angle A = \frac{12}{13}$.

Ответ: 2,5.

4.3. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OC*, если $AB = 12$ и $\sin\angle C = \frac{8}{17}$.

Ответ: 22,5.

4.4. Точка *O* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Найдите *OA*, если $BC = 9$ и $\sin\angle A = \frac{15}{17}$.

Ответ: 4,8.

5.1. Среди чисел, превышающих 2013, найдите наименьшее четное число *N*, при котором дробь $\frac{15N-7}{22N-5}$ сократима.

Ответ: 2144. *Решение:* Наличие общего множителя у чисел $15N-7$ и $22N-5$ влечет за собой наличие такого же множителя у числа $(22N-5)-(15N-7)=7N+2$, а далее последовательно у чисел $(15N-7)-2\cdot(7N+2)=N-11$, $(7N+2)-7\cdot(N-11)=79$. Так как 79 – простое число, то дробь сократима на 79, поэтому $N-11=79m$, $N=11+79m$. По условию *N* – четное, поэтому $N=90+158p$. Нужное значение достигается при $p=13$.

5.2. Найдите наибольшее нечетное число *N*, не превышающее 2013, при котором дробь $\frac{15N-7}{22N-5}$ сократима.

Ответ: 1907.

5.3. Найдите наибольшее четное число *N*, не превышающее 2013, при котором дробь $\frac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

Ответ: 1910.

5.4. Среди чисел, превышающих 2013, найдите наименьшее нечетное число N, при котором дробь $\dfrac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

Ответ: 2129.

6.1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arcsin\frac{x}{3}} \le \sqrt{\arccos\frac{y}{3}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 16. *Решение.* Область допустимых значений неравенства определяется системой $\begin{cases} \arcsin\frac{x}{3} \ge 0, \\ \arccos\frac{y}{3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ -3 \le y \le 3. \end{cases}$ Если $-3 \le y \le 0$, то $\arccos\frac{y}{3} \ge \frac{\pi}{2} \ge \arcsin\frac{x}{3}$.

Следовательно, весь квадрат $\{0 \le x \le 3, -3 \le y \le 0\}$ площади 9 входит в искомое множество.

На оставшемся множестве $\{0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3\}$ справедливы неравенства $0 \le \arcsin\frac{x}{3} \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \arccos\frac{y}{3} \le \frac{\pi}{2}$, и, так как функция $\sin t$ возрастает при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, получим равносильные неравенства $\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) \le \sin\left(\arccos\frac{y}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} \le \sqrt{1-\left(\frac{y}{3}\right)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 9$.

Поэтому здесь в искомое множество входит четверть круга, площадь которой $\dfrac{\pi\cdot 3^2}{4}$.

Суммарно искомая площадь равна $9\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \approx 16,069...$

6.2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arcsin\frac{x}{5}} \le \sqrt{\arccos\frac{y}{5}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 45.

6.3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arccos\frac{x}{8}} \geq \sqrt{\arcsin\frac{y}{8}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 114.

6.4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arccos\frac{x}{6}} \geq \sqrt{\arcsin\frac{y}{6}}$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

Ответ: 64.

7.1. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна 3. Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна 573. Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 161. *Решение*. Пусть знаменатели прогрессий равны p и q. Согласно условию, получаем: $\begin{cases} p+q=3, \\ p^5+q^5=573 \end{cases}$. Найти требуется p^4+q^4. Обозначив $p+q=a$, $pq=b$, выразим:

$$p^4+q^4=\left((p+q)^2-2pq\right)^2-2p^2q^2 =\left(a^2-2b\right)^2-2b^2 =a^4-4a^2b+2b^2;$$

$$p^5+q^5=(p+q)\left(p^4-p^3q+p^2q^2-pq^3+q^4\right) =(p+q)\left(p^4+q^4-pq\left(p^2+q^2\right)+p^2q^2\right)$$

$$=a\left(a^4-4a^2b+2b^2-b\left(a^2-2b\right)+b^2\right) =a\left(a^4-5a^2b+5b^2\right).$$

По условию $\begin{cases} a=3, \\ a\left(a^4-5a^2b+5b^2\right)=573 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3, \\ 81-45b+5b^2=191 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3, \\ b^2-9b-22=0 \end{cases}$.

Отсюда $b=11$ или $b=-2$. Так как система $\begin{cases} p+q=3, \\ pq=11 \end{cases}$ решений не имеет, то $b=-2$.

Поэтому $a=3$ и $b=-2$. Значит, $p^4+q^4 =a^4-4a^2b+2b^2 =81+72+8=161$.

7.2. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна (-4). Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна (-724). Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 194.

7.3. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна 2. Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна 242. Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 82.

7.4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна (-1). Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна (-31). Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 17.

7.5. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна (-1). Найдите сумму пятых членов этих прогрессий, если сумма шестых членов равна (-61). Если ответ на вопрос задачи неоднозначен, укажите сумму всех возможных значений искомой величины.

Ответ: 31.

8.1. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos 4x-\cos 8x-5}$.

Ответ: 0,5. *Решение*. Оценим модуль данного в условии выражения:

$$\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos 4x-\cos 8x-5}\right| \le \frac{1}{5-2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos 4x+\cos 8x}$$

$$=\frac{1}{4-4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 4x+2\cos^2 4x} = \frac{1}{4+2\left(\cos 4x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} \le \frac{1}{2}.$$

Верхняя граница может быть достигнута, если $\begin{cases}\cos 4x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1,\end{cases}$ и действительно достигается при $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

8.2. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)\cos 3x-\cos 6x-7}$.

Ответ: $-0,25$.

8.3. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)\cos 6x-\cos 12x-7}$.

Ответ: 0,25.

8.4. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\cos 6x-\cos 12x-5}$.

Ответ: $-0,5$.

9.1. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA'+SB'+SC'$, если $AS=6$, $BS=3$, $CS=2$, а объемы пирамид *SABC* и $SA'B'C'$ относятся как $2:9$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 18. *Решение.* Если *a*, *b*, *c* – данные ребра, *x*, *y*, *z* – соответствующие им ребра-продолжения, а k – данное отношение, то по теореме об отрезках пересекающихся хорд и лемме об отношении объемов пирамид с равными (вертикальными) трехгранными углами при вершине имеем: $\begin{cases} ax = by = cz \\ abc : xyz = k \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{abcxyz} = \sqrt[3]{\frac{(abc)^2}{k}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{ak}}$, откуда получаем

$$p = x + y + z = x\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) = \sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{ak}}\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

Здесь $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$, $k = \frac{2}{9} \Rightarrow p = \sqrt[3]{\frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 9}{6 \cdot 2}}\left(1 + \frac{6}{3} + \frac{6}{2}\right) = 18$.

9.2. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA' + SB' + SC'$, если $AS = 10$, $BS = 5$, $CS = 2$, а объемы пирамид *SABC* и $SA'B'C'$ относятся как $5:4$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 16.

9.3. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA' + SB' + SC'$, если $AS = 9$, $BS = 6$, $CS = 3$, а объемы пирамид *SABC* и $SA'B'C'$ относятся как $9:2$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 11.

9.4. Хорды AA', BB' и CC' одной сферы пересекаются в общей точке *S*. Найдите сумму $SA' + SB' + SC'$, если $AS = 10$, $BS = 4$, $CS = 2$, а объемы пирамид *SABC* и $SA'B'C'$ относятся как $4:5$. Если в ответе получится не целое число, округлите его до сотых.

Ответ: 17.

10.1. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0; 400]$, при каждом из которых уравнение $x^4 - 6x^2 + 4 = \sin\frac{\pi a}{200} - 2\left[x^2\right]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа *t* (наибольшее целое число, не превышающее *t*).

Ответ: 60100. *Решение.* Пусть $b=\sin\dfrac{\pi a}{200}$, $t=x^2$. Используя равенство $[t]=t-\{t\}$ (здесь $\{t\}$ – дробная часть *t*), получаем, что исходное уравнение равносильно уравнению $t^2-6t+4=b-2t+2\{t\}$. При этом заметим, что любому положительному *t* соответствуют два различных *x*, двум различным положительным *t* соответствует четыре различных *x*, трём различным положительным *t* – шесть различных *x* и т. д.

Решаем уравнение:

$$t^2-4t+4=b+2\{t\},\ b\in[-1;1]. \qquad (1)$$

Поскольку правая его часть принадлежит интервалу $[-1;3)$, то левая часть не выходит за рамки этого интервала при $(t-2)^2<3$, т. е. при $t\in\left(2-\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\right)$.

Рассмотрим четыре случая:

1) Пусть $t\in\left(2-\sqrt{3};1\right)$. Тогда $\{t\}=t$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+4=b$, откуда $t_1^{\pm}=3\pm\sqrt{5+\sin b}$. Из этих корней интервалу $\left(2-\sqrt{3};1\right)$ принадлежит только t_1^- при $b\in(-1;1]$.

2) Пусть $t\in[1;2)$. Тогда $\{t\}=t-1$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+6=b$, откуда $t_2^{\pm}=3\pm\sqrt{3+\sin b}$. Из этих корней интервалу $[1;2)$ принадлежит только t_2^- при любом $b\in[-1;1]$.

3) Пусть $t\in[2;3)$. Тогда $\{t\}=t-2$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+8=b$, откуда $t_3^{\pm}=3\pm\sqrt{1+\sin b}$. Из этих корней интервалу $[2;3)$ принадлежит только t_3^- при $b\in[-1;0]$.

4) Пусть $t\in\left[3;\,2+\sqrt{3}\right)$. Тогда $\{t\}=t-3$, и исходное уравнение принимает вид: $t^2-6t+10=b$, откуда $(t-3)^2+(1-b)=0$. Данное уравнение имеет единственное решение $t_4=3$ при $b=1$ (напомним, что $b\in[-1;1]$).

В итоге получаем:

при $b=-1$ уравнение (1) имеет одно положительно решение по *t*, а именно t_2^-, откуда исходное уравнение имеет два различных решения по переменной *x*;

при $b \in (0;1)$ уравнение (1) имеет два различных положительных решения по переменной t, а именно t_1^-, t_2^-, откуда исходное уравнение имеет четыре различных решения по переменной x;

при $b \in (-1;0] \cup \{1\}$ уравнение (1) имеет три различных положительных решения по переменной t, а именно t_1^-, t_2^-, t_3^- для $b \in (-1;0]$ и t_1^-, t_2^-, t_4 для $b=1$, откуда исходное уравнение имеет шесть различных решений по переменной x.

Поскольку $b=\sin\dfrac{\pi a}{200}$, то для $a \in [0;400]$ получаем, что при $a \in \{0\} \cup \{100\} \cup [200;300) \cup (300;400]$ будет шесть решений у исходного уравнения.

Получаем ответ: $0+100+(200+201+\ldots+400)-300=\dfrac{200+400}{2}\cdot 201-200=60100$.

10.2. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0;600]$, при каждом из которых уравнение $x^4-8x^2+9=\cos\dfrac{\pi a}{300}-2\left[x^2\right]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа t (наибольшее целое число, не превышающее t).

Ответ: 90600.

10.3. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0;800]$, при каждом из которых уравнение $x^4-10x^2+16=\sin\dfrac{\pi a}{400}-2\left[x^2\right]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа t (наибольшее целое число, не превышающее t).

Ответ: 240200.

10.4. Найдите сумму всех таких целых $a \in [0;800]$, при каждом из которых уравнение $x^4-12x^2+25=\cos\dfrac{\pi a}{400}-2\left[x^2\right]$ имеет ровно шесть корней. Здесь используется стандартное обозначение: $[t]$ – целая часть числа t (наибольшее целое число, не превышающее t).

Ответ: 160800.